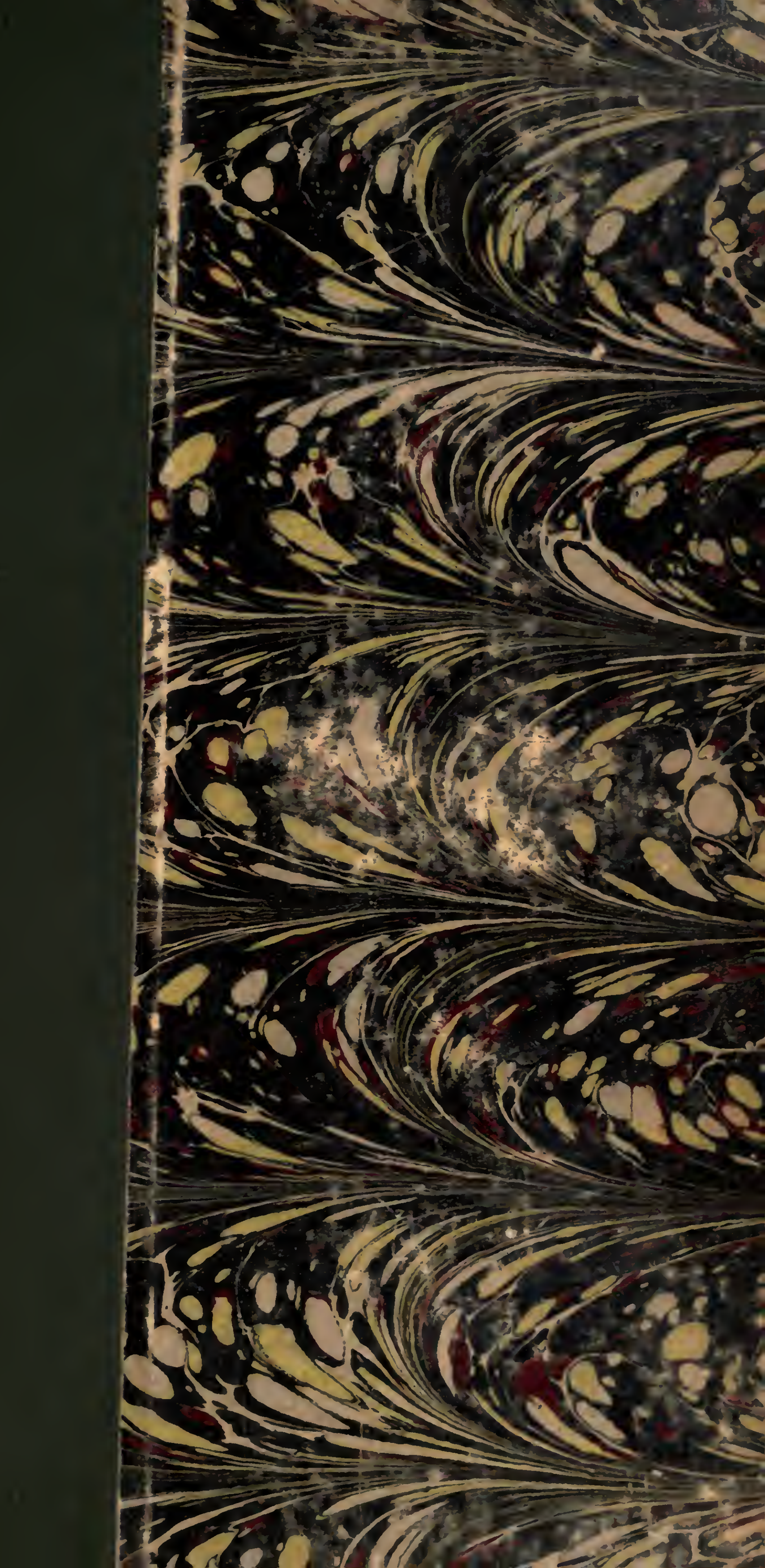
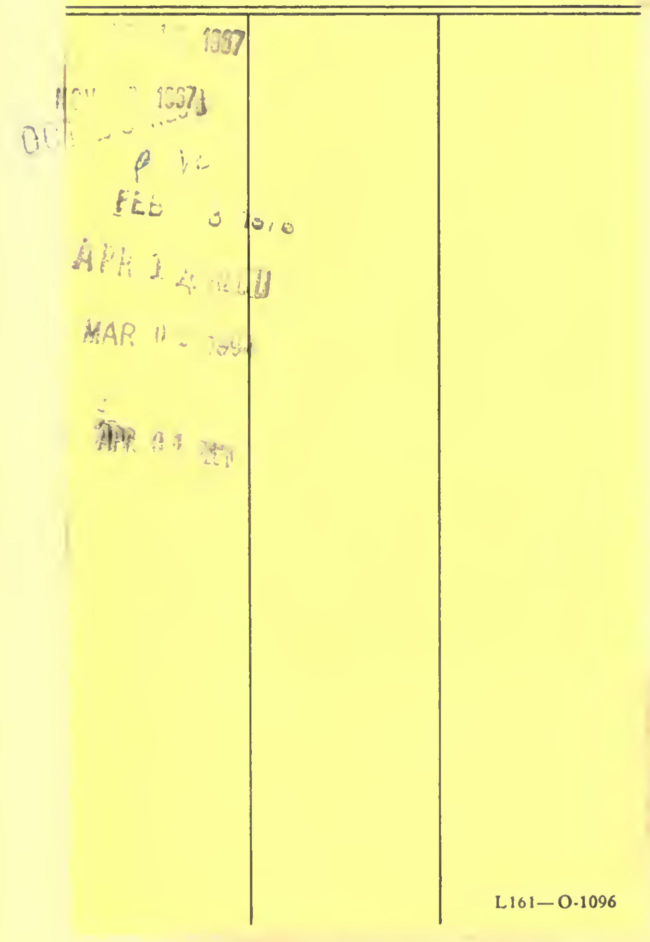




BERTRAND-A.-W. RUSSELL, M. A.,
FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE.

ESSAI

SUR LES

FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE.

TRADUCTION

PAR

ALBERT CADENAT,
Licencié ès Sciences mathématiques,
Professeur de Mathématiques au Collège de Saint-Claude,

REVUE ET ANNOTÉE PAR L'AUTEUR

ET PAR

Louis COUTURAT,
Chargé de cours de Philosophie à l'Université de Toulouse.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1901

ESSAI

SUR LES

FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

BERTRAND-A.-W. RUSSELL, M. A.
FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE.

ESSAI

SUR LES

FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE.

TRADUCTION

PAR

ALBERT CADENAT,
Licencié ès sciences mathématiques,
Professeur de Mathématiques au Collège de Saint-Claude,

REVUE ET ANNOTÉE PAR L'AUTEUR

ET PAR

Louis COUTURAT,
Chargé de cours de Philosophie à l'Université de Toulouse.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1901

A

JOHN MACTAGGART ELLIS MACTAGGART

JE DÉDIE CE LIVRE
QUI EST DU A SA CONVERSATION
ET A SON AMITIÉ.

AVERTISSEMENT DE L'AUTEUR

POUR L'ÉDITION FRANÇAISE.

Dans la présente édition, j'ai fait un grand nombre de corrections et d'additions. La plupart portent sur des points de détail; mais quelques-unes, dues principalement à des critiques, ont une importance plus grande. Au § 14, j'ai reconnu que J. Bolyaï était indépendant de Gauss, ce que j'avais auparavant mis en doute. Au § 79, à la suite d'une critique de M. Couturat ([1]), j'ai expliqué en quel sens la constante spatiale est une grandeur et en quel sens elle est privée de grandeur. En réponse aux articles de M. Lechalas ([2]), je me suis efforcé d'être plus explicite sur deux points, spécialement dans les §§ 79 et 151. Le premier point consiste dans la différence qu'il y a entre un plan de l'espace sphérique et une sphère de l'espace euclidien, ou, plus généralement, dans l'impossibilité de la coexistence d'espaces différents. Le second est le sens dans lequel il faut entendre la congruence et la libre mobilité.

Les précieuses critiques de M. Poincaré ([3]) me sont malheu-

([1]) *Revue de Métaphysique et de Morale*, mai 1898.

([2]) *Annales de Philosophie chrétienne*, août-novembre 1898, et *Revue de Métaphysique et de Morale*, novembre 1898.

([3]) *Revue de Métaphysique et de Morale*, mai 1899.

reusement parvenues trop tard pour que j'en pusse tenir compte dans cette revision.

J'ai ajouté en Appendice quelques notes mathématiques; M. Couturat y a joint l'explication de quelques-uns des termes philosophiques les plus fréquents, ce dont je lui suis très reconnaissant. Je lui ai, ainsi qu'au traducteur, M. Cadenat, les plus grandes obligations pour le temps et la peine qu'ils ont généreusement consacrés à cette édition. Je souhaite qu'ils ne les aient pas dépensés en vain, et ce qui me donne lieu de l'espérer, ce n'est pas le mérite quelconque que mon Ouvrage peut posséder, mais l'accueil très bienveillant qu'il a déjà reçu du public philosophique et mathématique français.

Mai 1900.

B.-A.-W. Russell.

PRÉFACE.

Le présent Ouvrage a pour origine une Dissertation soumise à l'examen d'Agrégation de Trinity College, Cambridge, en l'année 1895. La section B du troisième Chapitre est, en grande partie, la réimpression, avec quelques changements importants, d'un article du *Mind* (¹). La substance de ce Livre a été donnée sous forme de conférences à l'Université Johns Hopkins de Baltimore et à Bryn Mawr College, Pennsylvanie.

Je dois ma principale obligation au professeur Klein. Pour tout le premier Chapitre, j'ai trouvé dans ses *Leçons sur la Géométrie non-Euclidienne* un guide inestimable; je lui ai emprunté la division de l'histoire de la Métagéométrie en trois périodes, et la partie historique de mon Ouvrage a été bien facilitée par ses références aux auteurs antérieurs. En Logique, j'ai beaucoup appris de M. Bradley, et, après lui, de Sigwart et du Dr Bosanquet. Sur plusieurs points importants, j'ai retiré d'utiles suggestions des *Principes de Psychologie* du professeur James.

Je dois des remerciements à M. G.-F. Stout et à M. A.-N. Whitehead pour avoir relu avec soin mes épreuves, et pour

(¹) New Series, n° 17.

m'avoir aidé de maintes critiques utiles. Je suis en outre redevable à M. Whitehead de la précieuse assistance de ses critiques et de ses conseils dans tout le cours de mon travail, spécialement en ce qui concerne l'importance philosophique de la Géométrie projective.

Haslemere, mai 1897.

ESSAI

SUR LES

FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE.

« Eine Wissenschaft von allen möglichen Raumesarten wäre ohnfehlbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte. »

« Une science de toutes les espèces possibles d'espace serait sans aucun doute la Géométrie la plus haute qu'un entendement fini pût entreprendre. »

KANT.

INTRODUCTION.

DÉFINITION DU PROBLÈME PAR SES RAPPORTS AVEC LA LOGIQUE, LA PSYCHOLOGIE ET LES MATHÉMATIQUES.

1. Pendant le XVII[e] et le XVIII[e] siècle, la Géométrie était restée la forteresse inexpugnable des idéalistes dans la guerre contre l'empirisme. Ceux qui soutenaient, comme on le faisait généralement sur le continent, qu'on peut avoir une connaissance certaine indépendante de l'expérience et portant sur le monde réel, n'avaient qu'à montrer la Géométrie : personne, si ce n'est un insensé, disaient-ils, n'élèverait de doute sur sa validité, et nul autre qu'un fou ne pourrait nier son application objective. Les empiristes anglais avaient donc, dans cette question, une tâche quelque peu difficile : ou bien ils étaient obligés d'ignorer le problème, ou bien, si, comme Hume et Mill, ils se hasardaient à l'assaut, ils étaient acculés à cette assertion, en apparence paradoxale, que la Géométrie, au fond, ne possède pas une certitude d'une autre espèce que celle de la Mécanique; selon eux, la présence perpétuelle des impressions spatiales suffit à nous donner une expérience tellement longue de

la vérité des axiomes, qu'ils nous *semblent* absolument certains.

Ici, cependant, comme dans plusieurs autres cas, une logique impitoyable poussait ces philosophes, qu'ils le voulussent ou non, à se mettre en opposition flagrante avec le sens commun de leur époque. Ce fut seulement de Kant, le créateur de l'Épistémologie moderne, que le problème géométrique reçut sa forme actuelle. Il ramena la question aux propositions hypothétiques suivantes : Si la Géométrie a une certitude apodictique, son objet, c'est-à-dire l'espace, doit être *a priori* et, comme tel, purement subjectif : et réciproquement, si l'espace est purement subjectif, la Géométrie doit avoir une certitude apodictique. La dernière proposition a plus de poids pour Kant, car elle est indissolublement liée à son Épistémologie tout entière ; néanmoins, elle possède, je crois, beaucoup moins de force que la première. Acceptons cependant, pour le moment, la formule de Kant, et efforçons-nous de donner de la précision aux termes *a priori* et *subjectif* ([1]).

2. Une des grandes difficultés, dans cette discussion, est l'emploi extrêmement variable que différents auteurs font de ces mots, ainsi que du mot *empirique*. Pour Kant, qui n'était nullement un psychologue, les termes *a priori* et *subjectif* étaient presque équivalents([2]) ; dans l'usage moderne, on tend, en général, à réserver le mot *subjectif* à la Psychologie, en laissant *a priori* au service de l'Épistémologie. Si nous adoptons cette distinction, nous pouvons poser, conformément aux fins de ces deux Sciences, les définitions provisoires suivantes : *a priori* s'applique à toute partie de la connaissance qui, quoique peut-être suscitée par l'expérience, est *logiquement* présupposée dans l'expérience : *subjectif* s'applique à tout état mental dont la cause immédiate réside, non dans le monde extérieur, mais dans les limites du sujet. La dernière définition a été naturellement créée pour l'usage exclusif de la Psycho-

---

([1]) *Voir* à l'Appendice les notes philosophiques.

([2]) *Cf.* Erdmann, *Axiome der Geometrie*, p. 111 : « Pour Kant, l'apriorité et la subjectivité exclusive sont certainement des concepts équivalents. »

logie : car, au point de vue de la Science physique, tous les états mentaux sont subjectifs. Mais dans une science dont l'objet, à parler strictement, est *uniquement* les états mentaux, on a besoin, si l'on veut faire de ce mot un usage déterminé, de faire entre les états mentaux quelque différence qui marque une subjectivité plus spéciale chez ceux auxquels le terme est appliqué.

Or les seuls états mentaux dont les causes immédiates résident dans le monde extérieur sont les *sensations*. Une sensation pure est, naturellement, une abstraction impossible (car nous ne restons jamais complètement passifs sous l'action d'un stimulus externe); mais, pour les besoins de la Psychologie, c'est une abstraction utile. Nous appellerons donc *subjectif*, en Psychologie, tout ce qui n'est pas sensation. C'est dans la sensation seule que nous sommes directement affectés par le monde extérieur : elle seule nous donne une information directe sur ce monde.

3. Considérons, maintenant, la question épistémologique, concernant l'espèce de connaissance qui peut être appelée *a priori*. Dans ce cas, on n'a nullement affaire (au moins en principe) à la cause ou à la genèse d'une partie de la connaissance : on accepte la connaissance comme une donnée à analyser et à classer. Une telle analyse révélera un élément formel et un élément matériel dans la connaissance. L'élément formel comprendra les postulats qui sont requis pour rendre la connaissance possible en général, et tout ce qui peut se déduire de ces postulats; l'élément matériel, d'autre part, comprendra tout ce qui vient remplir la forme définie par les postulats formels, c'est-à-dire tout ce qui est contingent ou dépendant de l'expérience, tout ce qui aurait pu être autrement sans rendre la connaissance impossible. Nous appellerons donc l'élément formel *a priori* et l'élément matériel *empirique*.

4. Quelle est, maintenant, la connexion entre le subjectif et l'a priori ? Cette connexion (si tant est qu'elle existe) provient évidemment de l'extérieur, c'est-à-dire qu'elle ne peut se

cher à fonder la nécessité dans une science quelconque. On peut les distinguer (en gros) en disant que l'un est le principe que Kant cherche dans les *Prolégomènes,* et que l'autre est celui qu'il cherche dans la *Critique de la raison pure.* On peut partir de l'existence de la science comme fait, et analyser les raisonnements qu'elle emploie, afin de découvrir le postulat fondamental dont dépend sa possibilité logique; dans ce cas, le postulat, et tout ce qui découle de lui seul, sera *a priori.* Ou bien on peut prendre pour accordée l'existence de l'objet de la science, comme base de fait, et déduire dogmatiquement, de la nature essentielle de cet objet, tous les principes qu'on en peut déduire. Mais, dans ce dernier cas, ce n'est pas toute la nature empirique de cet objet, telle qu'elle est révélée par les recherches subséquentes de notre science, qui forme le principe; car s'il en était ainsi, la science tout entière devrait, naturellement, être *a priori.* C'est plutôt cet élément de l'objet qui rend *possible* la branche de l'expérience dont traite la science en question ([1]). L'importance de cette distinction apparaîtra plus clairement à mesure que nous avancerons ([2]).

8. Ces deux principes de nécessité coïncident en dernière analyse. Les *méthodes* de recherche dans les deux cas diffèrent beaucoup, mais les *résultats* ne peuvent différer. Car dans le premier cas, par l'analyse de la science, on découvre les seuls postulats sur lesquels puissent s'appuyer ses raisonnements. Or, si le raisonnement est impossible dans la science sans un certain postulat, ce postulat doit être essentiel à l'expérience de l'objet de cette science, et ainsi l'on retrouve le second principe. Néanmoins, les deux méthodes sont utiles comme se complétant l'une l'autre : la première, partant de la science

---

([1]) J'emploie ici le mot *expérience* dans le sens le plus large possible, sens dans lequel le mot est employé par Bradley.

([2]) Lorsque la branche de l'expérience en question est essentielle à toute expérience, l'apriorité qui en résulte peut être regardée comme absolue; lorsqu'elle n'est nécessaire qu'à quelque science spéciale, elle peut être regardée comme relative à cette science.

actuelle, est la méthode d'investigation la plus sûre et la plus aisée, tandis que la seconde paraît être la plus convaincante pour l'exposition.

9. Le plan de mon étude sera donc le suivant : dans le premier Chapitre, comme préliminaire à l'analyse logique de la Géométrie, je ferai brièvement l'histoire de la naissance et du développement des systèmes non-euclidiens. Le second Chapitre préparera le terrain pour une théorie constructive de la Géométrie, par une analyse critique de quelques opinions philosophiques antérieures; dans ce Chapitre, je tâcherai de montrer ce que ces opinions ont de vrai ou de faux, et d'établir ainsi, par une discussion préliminaire, la vérité des parties de ma propre théorie qui se trouvent dans les auteurs précédents. Mais une grande partie de cette théorie ne peut pas être ainsi introduite, puisque le domaine entier de la Géométrie projective, autant qu'il est à ma connaissance, a été jusqu'ici inconnu des philosophes. Passant, dans le troisième Chapitre, de la critique à la construction, je traiterai tout d'abord de la Géométrie projective. Je démontrerai que celle-ci est nécessairement vraie de toute forme d'extériorité, et qu'elle est complètement *a priori,* attendu qu'une telle forme est nécessaire à l'expérience. En revanche, dans la Géométrie métrique, que je considérerai ensuite, les axiomes se répartiront en deux classes : 1° ceux qui sont communs aux espaces euclidien et non-euclidiens; on trouvera, d'une part, qu'ils sont nécessaires à la possibilité de la mesure dans un continu quelconque, et, d'autre part, qu'ils sont les propriétés essentielles de toute forme d'extériorité à plus d'une dimension; ils seront par conséquent déclarés *a priori;* 2° ceux qui distinguent l'espace euclidien des espaces non-euclidiens. Ces derniers axiomes seront regardés comme entièrement empiriques. Toutefois, l'axiome qui fixe à trois le nombre des dimensions, quoique empirique, sera admis comme exactement et certainement vrai de notre monde actuel, attendu que de petites erreurs sont impossibles à ce sujet; tandis que les deux autres axiomes, qui déterminent la valeur de la constante spatiale, seront regardés

cher à fonder la nécessité dans une science quelconque. On peut les distinguer (en gros) en disant que l'un est le principe que Kant cherche dans les *Prolégomènes*, et que l'autre est celui qu'il cherche dans la *Critique de la raison pure*. On peut partir de l'existence de la science comme fait, et analyser les raisonnements qu'elle emploie, afin de découvrir le postulat fondamental dont dépend sa possibilité logique; dans ce cas, le postulat, et tout ce qui découle de lui seul, sera *a priori*. Ou bien on peut prendre pour accordée l'existence de l'objet de la science, comme base de fait, et déduire dogmatiquement, de la nature essentielle de cet objet, tous les principes qu'on en peut déduire. Mais, dans ce dernier cas, ce n'est pas toute la nature empirique de cet objet, telle qu'elle est révélée par les recherches subséquentes de notre science, qui forme le principe; car s'il en était ainsi, la science tout entière devrait, naturellement, être *a priori*. C'est plutôt cet élément de l'objet qui rend *possible* la branche de l'expérience dont traite la science en question (¹). L'importance de cette distinction apparaîtra plus clairement à mesure que nous avancerons (²).

8. Ces deux principes de nécessité coïncident en dernière analyse. Les *méthodes* de recherche dans les deux cas diffèrent beaucoup, mais les *résultats* ne peuvent différer. Car dans le premier cas, par l'analyse de la science, on découvre les seuls postulats sur lesquels puissent s'appuyer ses raisonnements. Or, si le raisonnement est impossible dans la science sans un certain postulat, ce postulat doit être essentiel à l'expérience de l'objet de cette science, et ainsi l'on retrouve le second principe. Néanmoins, les deux méthodes sont utiles comme se complétant l'une l'autre : la première, partant de la science

---

(¹) J'emploie ici le mot *expérience* dans le sens le plus large possible, sens dans lequel le mot est employé par Bradley.

(²) Lorsque la branche de l'expérience en question est essentielle à toute expérience, l'apriorité qui en résulte peut être regardée comme absolue; lorsqu'elle n'est nécessaire qu'à quelque science spéciale, elle peut être regardée comme relative à cette science.

actuelle, est la méthode d'investigation la plus sûre et la plus aisée, tandis que la seconde paraît être la plus convaincante pour l'exposition.

9. Le plan de mon étude sera donc le suivant : dans le premier Chapitre, comme préliminaire à l'analyse logique de la Géométrie, je ferai brièvement l'histoire de la naissance et du développement des systèmes non-euclidiens. Le second Chapitre préparera le terrain pour une théorie constructive de la Géométrie, par une analyse critique de quelques opinions philosophiques antérieures; dans ce Chapitre, je tâcherai de montrer ce que ces opinions ont de vrai ou de faux, et d'établir ainsi, par une discussion préliminaire, la vérité des parties de ma propre théorie qui se trouvent dans les auteurs précédents. Mais une grande partie de cette théorie ne peut pas être ainsi introduite, puisque le domaine entier de la Géométrie projective, autant qu'il est à ma connaissance, a été jusqu'ici inconnu des philosophes. Passant, dans le troisième Chapitre, de la critique à la construction, je traiterai tout d'abord de la Géométrie projective. Je démontrerai que celle-ci est nécessairement vraie de toute forme d'extériorité, et qu'elle est complètement *a priori,* attendu qu'une telle forme est nécessaire à l'expérience. En revanche, dans la Géométrie métrique, que je considérerai ensuite, les axiomes se répartiront en deux classes : 1° ceux qui sont communs aux espaces euclidien et non-euclidiens; on trouvera, d'une part, qu'ils sont nécessaires à la possibilité de la mesure dans un continu quelconque, et, d'autre part, qu'ils sont les propriétés essentielles de toute forme d'extériorité à plus d'une dimension; ils seront par conséquent déclarés *a priori;* 2° ceux qui distinguent l'espace euclidien des espaces non-euclidiens. Ces derniers axiomes seront regardés comme entièrement empiriques. Toutefois, l'axiome qui fixe à trois le nombre des dimensions, quoique empirique, sera admis comme exactement et certainement vrai de notre monde actuel, attendu que de petites erreurs sont impossibles à ce sujet; tandis que les deux autres axiomes, qui déterminent la valeur de la constante spatiale, seront regardés

comme n'étant connus que d'une manière approchée, et comme n'étant certains que dans les limites des erreurs d'observation [1]. Enfin, le quatrième Chapitre s'efforcera de prouver ce qui a été supposé dans le Chapitre III, à savoir que quelque forme d'extériorité est nécessaire à l'expérience, et conclura en montrant que, si l'on veut que la connaissance d'une telle forme soit exempte de contradictions, il est logiquement impossible d'y faire complètement abstraction de tout rapport à la matière contenue dans cette forme.

J'espère avoir abordé, dans cette discussion, toutes les questions importantes relatives aux fondements de la Géométrie.

---

[1] Je n'ai fait aucune mention de ces preuves empiriques, car elles me semblent constituées par le corps entier de la Science physique. Tout, en Physique, depuis la loi de la gravitation jusqu'à la construction des ponts, depuis le spectroscope jusqu'à l'art de la navigation, serait profondément modifié, si l'hypothèse que notre espace actuel est euclidien était notablement inexacte. La vérification de la Science physique par l'observation constitue donc une preuve empirique écrasante que cette hypothèse est très approximativement exacte, sinon même rigoureusement vraie [1].

[1] Depuis que cet Ouvrage a paru, l'auteur a traité plus à fond cette question dans deux articles publiés dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*, en réponse aux objections de MM. Poincaré et Couturat, sous les titres : *Les axiomes propres à Euclide sont-ils empiriques?* (novembre 1898) et : *Sur les axiomes de la Géométrie* (novembre 1899).

(*Note du traducteur.*)

CHAPITRE I.

HISTOIRE SOMMAIRE DE LA MÉTAGÉOMÉTRIE.

10. Lorsqu'un système établi depuis longtemps se trouve attaqué, il arrive d'ordinaire que l'attaque commence seulement sur un point unique, où la faiblesse de la doctrine établie est particulièrement évidente. Mais la critique, une fois engagée, est capable de s'étendre beaucoup plus loin que l'audace la plus grande ne l'aurait tout d'abord désiré.

First cut the liquefaction, what comes last,
But Fichte's clever cut at God himself? (1).

Il en a été ainsi de la Géométrie. La liquéfaction, c'est-à-dire le point faible, de l'orthodoxie euclidienne, est l'axiome des parallèles, et la Métagéométrie commença lorsqu'il fut reconnu qu'il est impossible de démontrer cet axiome. Avant Gauss, tous les efforts dans cette direction, jusqu'à celui de Legendre (2), avaient été inspirés par l'espoir de déduire cet axiome des autres; espoir qui, nous le savons maintenant, était condamné à une faillite inévitable. Legendre définit les parallèles comme des droites situées dans un même plan et telles que, si une troisième les coupe, la somme des angles intérieurs est égale à deux angles droits. Il prouve sans difficulté que de

---

(1) « Ruinez d'abord la liquéfaction, qu'arrive-t-il à la fin, sinon que l'habile Fichte ruine Dieu lui-même? » Robert Browning, *Bishop Blougram's Apology* (Apologie de l'évêque Blougram). Allusion au miracle de la liquéfaction du sang de saint Janvier, qui se produit à Naples à certaines dates fixes, notamment le 19 septembre. (*Note du traducteur.*)

(2) Voir *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France*, t. XII, 1833, pour un exposé complet de ses résultats, avec références aux travaux antérieurs. Une énumération des plus importantes de ces tentatives se trouve dans *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, par Stäckel et Engel, Leipzig, Teubner, 1895.

telles lignes ne peuvent se rencontrer, mais il est incapable de prouver que des lignes non parallèles, situées dans un même plan, doivent se rencontrer. De même, il réussit à prouver que la somme des angles d'un triangle ne peut excéder deux angles droits, et que, si un seul triangle a une somme d'angles égale à deux droits, tous les triangles auront la même somme; mais il lui est impossible de prouver l'existence de ce seul triangle.

11. Ainsi la tentative de Legendre avait échoué; mais un simple échec ne peut rien prouver. Une méthode plus hardie, suggérée par Gauss, fut appliquée par Lobatchevsky et par Bolyaï indépendamment l'un de l'autre ([1]). Si l'axiome des parallèles peut se déduire logiquement des autres, on doit, en le niant, et en maintenant le reste, aboutir à des contradictions. En conséquence, ces trois mathématiciens attaquèrent le problème indirectement : ils nièrent l'axiome des parallèles et obtinrent cependant une géométrie logiquement conséquente avec elle-même. Ils en conclurent que l'axiome était logiquement indépendant des autres et essentiel au système euclidien. Leurs travaux, étant tous inspirés par ce motif, peuvent être mis à part comme formant la première période dans le développement de la Métagéométrie.

La seconde période, inaugurée par Riemann, eut une portée bien plus profonde; elle se distingue surtout par son but philosophique et par ses méthodes constructives. Son but n'était rien moins qu'une analyse logique de tous les axiomes essentiels de la Géométrie, en regardant l'espace comme un cas particulier du concept plus général de *multiplicité*. En s'appuyant sur les méthodes de la Géométrie analytique métrique, elle établit

---

([1]) Cette méthode avait été suggérée, près d'un siècle auparavant, par un Italien, Saccheri. Son Ouvrage, qui semble être resté presque inconnu jusqu'à ce que Beltrami le découvrît à nouveau en 1889, est intitulé *Euclides ab omni naevo vindicatus*, etc., Mediolani, 1733. Ses résultats comprennent l'espace sphérique aussi bien que l'espace hyperbolique; mais ils l'alarmèrent tellement qu'il a consacré la dernière moitié de son Livre à les réfuter. Un travail semblable à celui de Saccheri, mais meilleur sous certains rapports, fut celui de Lambert : *Theorie der Parallellinien*, Leipzig, 1786. (*Voir* Stäckel et Engel, *op. cit.*)

deux systèmes non-euclidiens : le premier était celui de Lobatchevsky; le second (où l'on niait aussi l'axiome de la ligne droite sous la forme donnée par Euclide) constituait une nouvelle variété, appelée *sphérique* par analogie. L'idée directrice de cette période est la *mesure de la courbure*, terme inventé par Gauss, mais appliqué par lui aux surfaces seulement. Gauss avait montré que la libre mobilité sur les surfaces n'est possible que lorsque leur courbure totale est constante; Riemann et Helmholtz étendirent cette proposition à n dimensions, et en firent la propriété fondamentale de l'espace.

Dans la troisième période, qui commence avec Cayley, le motif philosophique qui avait poussé les premiers pionniers est moins apparent et est remplacé par un esprit plus technique et plus mathématique. Au point de vue mathématique, cette période se distingue de la seconde surtout par sa méthode, qui est projective et non plus métrique. L'idée mathématique directrice est ici l'Absolu (*Grundgebild*), figure par rapport à laquelle toutes les propriétés métriques deviennent projectives. Le travail de Cayley, qui est très court et qui attira peu l'attention, a été complété et achevé par Klein, qui l'a fait accepter universellement. Klein a ajouté aux deux espèces de géométries non-euclidiennes déjà connues une troisième, qu'il appelle *elliptique;* celle-ci ressemble étroitement à la géométrie sphérique de Helmholtz, mais elle s'en distingue par cette importante différence que, dans cet espace, deux lignes droites ne se rencontrent qu'en un seul point (¹). Le caractère dis-

(¹) Le premier exposé que Klein ait fait de la géométrie elliptique, comme résultat de la théorie projective de la distance de Cayley, parut en deux articles intitulés : *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, I, II (*Mathematische Annalen*, t. IV et VI; 1871-1872), *Sur la Géométrie dite non-euclidienne*, trad. Laugel (Paris, Hermann, 1898). Elle a été plus tard découverte, d'une manière indépendante, par Newcomb dans un article intitulé : *Elementary theorems relating to the Geometry of a space of three dimensions, and of uniform positive curvature in the fourth dimension* (*Journal de Crelle*, t. 83, 1877). Pour un exposé des controverses mathématiques concernant la Géométrie elliptique, *voir* KLEIN, *Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie*, t. I, p. 284 et suiv.; Göttingen, 1893. (Cet Ouvrage sera cité dans la suite sous le titre : *Nicht-Euklid.*) Une bibliographie de la littérature non-euclidienne, jusqu'à l'année 1878, a été donnée par Halsted dans l'*American Journal of Mathematics*, t. I et II.

tinctif des espaces représentés par ces deux géométries est que, comme la surface de la sphère, ils sont finis mais illimités. La réduction des propriétés métriques aux propriétés projectives, comme on le prouvera dans la suite, n'a qu'une importance technique; en revanche, la Géométrie projective est en mesure de traiter directement les propriétés purement descriptives ou qualitatives de l'espace qui sont communes aux géométries euclidienne et non-euclidiennes. La troisième période a donc une grande importance philosophique, et sa méthode possède, au point de vue mathématique, une beauté et une unité bien plus grandes que celle de la seconde; elle est capable de traiter tous les genres d'espaces à la fois, de sorte que chaque proposition symbolique forme, suivant la signification attribuée aux symboles, une proposition dans n'importe quelle géométrie, au choix. Elle a l'avantage de prouver que des recherches plus étendues ne peuvent conduire à des contradictions dans les systèmes non-euclidiens, sans révéler en même temps des contradictions dans la Géométrie euclidienne. Ces systèmes sont donc logiquement aussi valides que celui d'Euclide lui-même.

Après cette rapide esquisse des traits caractéristiques des trois périodes, je vais procéder à un exposé plus détaillé. Je me propose d'éviter, autant que possible, tous les détails mathématiques techniques, et de mettre en relief seulement les points fondamentaux du développement mathématique qui paraîtront avoir une importance logique ou philosophique.

PREMIÈRE PÉRIODE.

12. L'initiateur de toute la Métagéométrie, Gauss, ne paraît pas avoir donné, en ce qui concerne strictement la Géométrie non-euclidienne, autre chose que des résultats, dans aucun des Mémoires publiés jusqu'ici; ses démonstrations nous restent inconnues. Néanmoins, il fut le premier à rechercher les conséquences de la négation de l'axiome des parallèles ([1]), et il

---

([1]) Veronese (*Grundzüge der Geometrie,* traduction allemande, Leipzig,

communiqua ces conséquences dans ses lettres à quelques-uns de ses amis, parmi lesquels se trouvait Wolfgang Bolyaï. La première mention de ce sujet apparaît dans ses lettres à l'âge de dix-huit ans; quatre ans plus tard, en 1799, écrivant à W. Bolyaï, il énonçait cet important théorème qu'il y a, dans la géométrie hyperbolique, un maximum à l'aire d'un triangle, quoiqu'il espère, cette fois encore, trouver quelque contradiction due à la négation de l'axiome des parallèles. De ses écrits postérieurs il ressort qu'il avait élaboré un système presque aussi complet, si ce n'est tout à fait, que ceux de Lobatchevsky et de Bolyaï (¹).

Il importe de rappeler, toutefois, que le travail de Gauss sur la courbure, qui, lui, fut publié, avait posé les fondements de toute la méthode de la seconde période, et qu'il fut entrepris, d'après Riemann et Helmholtz (²), en vue d'une recherche (inédite) sur les fondements de la Géométrie. En raison de leur méthode, ses travaux dans ce sens seront mieux à leur place dans la seconde période, mais il est intéressant d'observer que Gauss, comme beaucoup de précurseurs, se trouve à la tête de deux tendances qui divergèrent par la suite.

13. Lobatchevsky, professeur à l'Université de Kasan, publia d'abord ses résultats en langue russe, dans les *Comptes rendus* de cette Université, en 1829-1830. A cause de cette double obscurité de langue et de lieu, ils attirèrent peu l'attention, jusqu'à ce qu'il les eût transportés en français (³) et en allemand (⁴);

1894; p. 638) nie la priorité de Gauss comme inventeur d'un système non-euclidien, quoiqu'il admette qu'il a été le premier à regarder l'axiome des parallèles comme indémontrable. Les raisons qu'il donne de la première assertion ne nous paraissent guère probantes. Pour la preuve du contraire, *voir* KLEIN, *Nicht-Euklid*, t. I, p. 171 à 174; STÄCKEL et ENGEL, *op. cit.*, p. 219 à 235, 249 et 250.

(¹) *Voir* sa correspondance avec Schumacher, t. II, p. 268; *cf.* l'*Extrait de la Correspondance de Gauss et de Schumacher*, ap. LOBATCHEVSKY, *Recherches géométriques...*, traduction Houël, p. 35 à 42. Paris, Hermann, 1895.

(²) *Cf.* HELMHOLTZ, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. II, p. 611.

(³) *Géométrie imaginaire*, ap. *Journal de Crelle*, t. XVII; 1837.

(⁴) *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*,

même alors ils ne paraissent pas avoir obtenu la notoriété qu'ils méritent, jusqu'à ce que Beltrami, en 1868, déterrât l'article du *Journal de Crelle* et en fit le thème d'une brillante interprétation.

Dans l'Introduction de son Opuscule allemand, Lobatchevsky déplore le peu d'intérêt que ses compatriotes ont pris à ses écrits et le peu d'attention que les mathématiciens, depuis la tentative avortée de Legendre, ont prêté aux difficultés de la Théorie des parallèles. Le corps de l'Ouvrage commence par l'énoncé de plusieurs propositions importantes qui sont valables dans le système proposé aussi bien que dans celui d'Euclide : quelques-unes d'entre elles sont dans tous les cas indépendantes de l'axiome des parallèles, tandis que les autres en deviennent indépendantes si l'on substitue au mot « parallèle » l'expression « qui ne se coupent pas si loin qu'on les prolonge ». Vient ensuite une définition, formulée intentionnellement de manière à contredire celle d'Euclide : Par rapport à une droite donnée, toutes les autres droites du même plan peuvent être réparties en deux classes, celles qui coupent la droite donnée et celles qui ne la coupent pas; une ligne qui forme la limite entre ces deux classes est appelée *parallèle* à la droite donnée. Il s'ensuit que, par chaque point extérieur à la droite, on peut lui mener deux parallèles, une dans chaque direction. De ces prémisses on déduit une série de propositions par la méthode synthétique d'Euclide; la plus importante est que, dans un triangle, la somme des angles est toujours inférieure ou toujours égale à deux droits; dans ce dernier cas, le système tout entier devient orthodoxe. On établit aussi, avec la géométrie sphérique, une certaine analogie (dont on découvrira plus tard la signification et l'extension), qui consiste en gros dans la substitution des fonctions hyperboliques aux fonctions circulaires.

Berlin, 1840; réimprimé à Berlin, 1887. Traduit en anglais par HALSTED, à Austin (Texas, États-Unis), 4e édition; 1892. Traduit en français par J. HOÜEL. *Études géométriques sur la Théorie des parallèles*, suivies d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher, 1866; réimprimé par Hermann, Paris, 1895.

14. Le système de Johann Bolyaï ressemble beaucoup au précédent, à ce point que l'indépendance des deux travaux semble presque incroyable, quoiqu'elle soit un fait bien établi. Johann Bolyaï publia la première fois ses résultats en 1832, dans un Appendice à un Ouvrage de son père Wolfgang, intitulé : *Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens, a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta, ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.* Gauss, dont il était devenu l'ami intime au collège et le resta toute sa vie, avait correspondu avec Wolfgang Bolyaï, au sujet de la théorie des parallèles, et il avait coutume de dire que celui-ci était le seul homme qui appréciât ses spéculations philosophiques sur les axiomes de la Géométrie; néanmoins, Wolfgang paraît avoir conservé l'espoir de trouver une démonstration de l'axiome des parallèles, jusqu'à ce que son fils, indépendamment de lui et de Gauss, découvrît son système hyperbolique (¹). Les œuvres des deux Bolyaï sont très rares, et je ne connais leur méthode et leurs résultats que par les traductions de Frischauf et de Halsted (²). Ce système ressemble beaucoup à celui de Lobatchevsky, tant par la méthode que par les résul-

---

(¹) Klein présume (*Nicht-Euklid*, t. I) que J. Bolyaï et Lobatchevsky furent tous deux amenés à leurs recherches par Gauss. Il semble impossible de se prononcer sur la vérité de cette hypothèse. Mais ce qui me paraît hors de doute, c'est que la conception d'une géométrie non-euclidienne par J. Bolyaï ne provint ni de son père, ni de Gauss, et fut sa découverte personnelle et indépendante. C'est ce qui ressort de ses lettres et de celles de Gauss et de W. Bolyaï. *Voir* Stäckel et Engel, *op. cit.*, et *Gauss, les deux Bolyaï et la Géométrie non-euclidienne*, traduit par L. Laugel, Paris, Gauthier-Villars, 1897. Mon attention a été appelée sur les lettres en question par un compte rendu du présent Ouvrage, dû à M. G.-B. Halsted, dans la Revue américaine *Science*, 24 septembre 1897 (*Note ajoutée par l'auteur.*)

(²) Frischauf, *Absolute Geometrie, nach Johann Bolyaï*, Leipzig, 1872; Halsted, *The Science absolute of space*, traduit du latin, 4ᵉ édition, Austin (Texas, États-Unis), 1896.

La science absolue de l'espace, indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'axiome XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir a priori), et démonstration de la quadrature géométrique du cercle dans le cas de la fausseté de l'axiome XI, par Jean Bolyaï, traduit par J. Houël, 1868; réimprimé par Hermann, Paris, 1896.

tats, de sorte que ni cette méthode ni ces résultats n'ont besoin de nous retenir ici. Seuls les postulats initiaux, qui sont plus explicites que ceux de Lobatchevsky, méritent d'attirer un instant l'attention. L'Introduction de Frischauf, qui a un air philosophique et newtonien, commence par poser que la Géométrie a pour objet l'espace absolu (vide), obtenu en faisant abstraction de tous les corps qu'il contient; que deux figures sont appelées *congruentes* lorsqu'elles ne diffèrent que par la position, et que l'axiome de congruence est indispensable à toute détermination de quantités spatiales. La congruence se rapporterait aux corps géométriques, privés de toutes les propriétés des corps ordinaires, excepté l'impénétrabilité ([1]). La ligne droite est définie comme étant déterminée par deux de ses points ([2]), et un plan par trois. Nous trouverons, par la suite, que ces prémisses, avec une légère exception pour la ligne droite, sont essentielles à toute Géométrie. J'ai attiré l'attention sur ces prémisses, parce qu'on croit souvent que les métagéomètres nient l'axiome de congruence, ce qui, ici et ailleurs, n'est jamais le cas. L'importance attribuée à cet axiome par Bolyaï est due probablement à l'influence de Gauss, dont le travail sur la courbure des surfaces a servi de fondement à l'emploi que Helmholtz a fait de la congruence.

15. Il importe de rappeler que, pendant la période que nous venons de passer en revue, la Géométrie hyperbolique n'a qu'un but indirect; le motif qui dirige tout ce travail n'est pas de prouver la vérité de celle-ci, mais d'établir que l'axiome des parallèles est logiquement indépendant des autres axiomes. Si, en niant l'axiome des parallèles et en conservant le reste, on peut obtenir un système exempt de contradictions logiques, il s'ensuivra que l'axiome des parallèles ne peut pas être implicitement contenu dans les autres. Dans ce cas, toute

---

([1]) Erdmann, *Axiome der Geometrie*, p. 26.

([2]) Lobatchevsky et Bolyaï, comme le remarque Veronese, partent tous deux plutôt du couple de points que de la distance. (*Voir* Frischauf, *Absolute Geometrie*, Anhang.)

tentative pour se passer de cet axiome, comme celle de Legendre, est vouée à un échec; Euclide doit subsister ou tomber avec l'axiome suspecté. Naturellement, il restait possible que des développements ultérieurs révélassent des contradictions latentes dans ces systèmes. Mais cette possibilité fut écartée par l'œuvre plus directe et plus constructive de la seconde période, sur laquelle nous devons maintenant porter notre attention.

DEUXIÈME PÉRIODE.

16. Pendant près d'un quart de siècle, l'œuvre de Lobatchevsky et de Bolyaï resta sans résultat; et encore, les recherches de Riemann et de Helmholtz, quand elles parurent, semblent avoir été inspirées, non par ces auteurs, mais plutôt par Gauss ([1]) et Herbart. Nous trouvons, en conséquence, une très grande différence entre la première période et la seconde, au point de vue du but et de la méthode. La première, commençant par la critique d'un seul point du système d'Euclide, conserva sa méthode synthétique, tout en rejetant un de ses axiomes. La seconde, au contraire, guidée par un esprit plutôt philosophique que mathématique, entreprit de classer le concept de l'espace comme une espèce d'un concept plus général : elle traita l'espace algébriquement, et les propriétés qu'elle lui attribuait furent exprimées non en termes d'intuition, mais en termes d'algèbre. Le but de Riemann et de Helmholtz était de montrer, par l'exposition d'alternatives logiquement possibles, la nature empirique des axiomes admis. A cette fin, ils conçurent l'espace comme une espèce particulière de multiplicité, et montrèrent que diverses relations de grandeur (*Massverhältnisse*) étaient mathématiquement possibles dans une multiplicité étendue. Leur philosophie, qui ne me semble pas toujours irréprochable, sera discutée dans le Chapitre II; ici, bien

([1]) *Cf.* Stallo, *Concepts of modern Physics,* p. 248. Traduit en français sous le titre : *La Matière et la Physique moderne* (*Bibliothèque scientifique internationale,* Vol. XLVIII, 2e édition, Chap. XIII, p. 162. Alcan; 1891).

qu'il importe de rappeler le mobile philosophique de Riemann et de Helmholtz, nous restreindrons notre attention au côté mathématique de leur œuvre. Par là, tout en risquant de mutiler quelque peu le système de leurs pensées, nous assurerons au sujet une unité plus circonscrite et nous donnerons un exposé plus cohérent du développement purement mathématique. Mais il y a, à mon avis, une autre raison pour séparer la partie philosophique de leurs travaux de la partie mathématique. Tandis que leur but philosophique était de prouver que tous les axiomes sont empiriques et qu'ils seraient tous autres si le contenu de notre expérience était différent, le résultat involontaire de leur travail mathématique fut, si je ne me trompe, de fournir des matériaux pour une déduction *a priori* de certains axiomes. Bien qu'ils n'admissent pas la nécessité de ces axiomes, ils les introduisaient constamment dans leurs travaux mathématiques, avant de poser les fondements des systèmes non-euclidiens. Je soutiendrai, dans le Chapitre III, que cette conservation de quelques axiomes était logiquement inévitable et n'était pas due uniquement, comme ils le croyaient, au désir de se conformer à l'expérience. Si mon opinion est juste, il y a ici une divergence entre Riemann et Helmholtz philosophes, et Riemann et Helmholtz mathématiciens. C'est pourquoi il est préférable de retracer le développement mathématique en dehors des théories philosophiques qui les accompagnent.

17. Le Mémoire de Riemann : *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (¹) qui a fait époque, fut écrit et lu dans un petit cercle (²) en 1854; mais comme l'auteur désirait y apporter quelques changements, ce

---

(¹) *Œuvres complètes*, p. 255-268.

La dissertation de Riemann a été traduite en français par J. Houel, dans les *Annali di Matematica*, 2ᵉ série, t. III; 1870. La traduction de Houel figure aussi dans les *Œuvres mathématiques* de Riemann (traduction Laugel), pages 280 à 299 (Paris, Gauthier-Villars; 1898). Il existe également un tirage à part de cette traduction, chez Hermann (Paris; 1895).

(²) C'était une Thèse d'habilitation qui fut soutenue devant un jury présidé par Gauss. (*Note de M. L. Couturat.*)

travail resta inédit jusqu'en 1867, époque où il fut publié par ses exécuteurs testamentaires. Les deux concepts fondamentaux, dont l'invention fait l'importance historique de cette dissertation, sont celui de la *multiplicité* (1) et celui de la *courbure* d'une multiplicité. Le premier concept a un intérêt surtout philosophique, et a pour but principal de représenter l'espace comme un cas particulier d'une notion plus générale. J'aurai beaucoup à dire, dans le Chapitre II, sur cette face de la multiplicité; sa face mathématique, qui seule nous occupe ici, est moins compliquée et moins fertile en controverses. Le second concept a, lui aussi, un double objet, mais son emploi mathématique est le plus important. Nous allons étudier tour à tour ces deux notions.

18. (1) **Concept d'une multiplicité** (2). — Le dessein général de la dissertation de Riemann est de présenter les axiomes comme des étapes successives dans la classification de l'espèce nommée *espace*. Les axiomes de la Géométrie, semblables aux attributs d'une définition scolastique, apparaissent comme les déterminations successives de concepts de classe, aboutissant à l'espace euclidien. On a ainsi, au point de vue analytique, une formule presque aussi logique et aussi précise qu'on peut le désirer, et qui, par son caractère de classification, semble ne devoir contenir rien de superflu ou de surabondant; et l'on obtient explicitement les axiomes sous la forme la plus désirable, c'est-à-dire comme des attributs du concept de l'espace. En revanche, il est dommage que Rie-

---

(1) Nous traduisons par *multiplicité* le mot anglais *manifold*, correspondant au mot allemand *Mannichfaltigkeit*, que Houël rend par le mot *variété* dans sa traduction du Mémoire de Riemann : *Sur les hypothèses qui servent de base à la Géométrie*. (*Note du traducteur.*)

(2) Pour l'histoire de ce mot, *voir* STALLO, *Concepts of modern Physics*, p. 258, ou sa traduction française : *La Matière et la Physique moderne*, Chap. XIV, p. 202. Déjà employé par Kant, il fut adopté par Herbart avec presque le même sens qu'il a chez Riemann. Herbart, cependant, fait aussi usage du mot *Reihenform* pour exprimer une idée analogue. Voir *Psychologie als Wissenschaft*, t. I, § 100. et t. II, § 139, où l'analogie établie par Riemann entre l'espace et les couleurs est aussi suggérée.

mann, en conformité avec la tendance métrique de son temps, ait regardé l'espace comme étant primitivement une grandeur (¹) ou un assemblage de grandeurs, où le problème principal consiste à assigner des quantités aux différents éléments ou points, sans avoir égard à la nature qualitative des quantités assignées. Cela jette une grande obscurité sur toute la nature de la grandeur (²). Cette conception de la Géométrie est le fondement de la définition de la multiplicité, comme du concept général dont l'espace forme un cas particulier. Cette définition, qui n'est pas très claire, peut être présentée de la manière suivante.

19. Les notions de grandeur, suivant Riemann, ne sont possibles que là où l'on a un concept général capable de déterminations diverses (*Bestimmungsweisen*). Les diverses déterminations de ce concept forment ensemble une *multiplicité*, qui est continue ou discrète, suivant que le passage d'une détermination à une autre est continu ou discontinu. Les fragments particuliers d'une multiplicité, ou *quanta*, peuvent être comparés entre eux par le dénombrement quand elle est discrète, et par la mesure quand elle est continue. « La mesure consiste dans la superposition des quantités à comparer. Si cette superposition est impossible, les quantités ne peuvent être comparées que lorsque l'une d'elles fait partie d'une autre, et l'on ne peut décider alors que du plus ou du moins, et non du *combien grand* (³) » (p. 256). On obtient ainsi le concept général d'une multiplicité à plusieurs dimensions, dont l'espace et les couleurs sont cités comme des cas particuliers. Riemann attribue à l'absence de ce concept « l'obscurité » qui, au sujet des axiomes, « régna d'Euclide à Legendre » (p. 254). Et

---

(¹) *Cf.* le « concept quantitatif de l'espace » d'Erdmann.

(²) *Cf.* VERONESE, *op. cit.*, p. 642 : « Riemann est obscur dans sa définition du concept de grandeur. » *Voir* aussi toute la critique qui suit dans Veronese.

(³) *Œuvres mathématiques*, trad. Houël, p. 282-283; tirage à part, p. 3. (*Note du traducteur.*)

sans doute, Riemann a réussi, au point de vue algébrique, à exposer, bien plus clairement qu'aucun de ses prédécesseurs, les axiomes qui distinguent la grandeur spatiale des autres grandeurs dont s'occupent les Mathématiques. Mais, en supposant dès le début que l'espace peut être regardé comme une grandeur, il a été amené à poser le problème ainsi : « Quelle espèce de grandeur est l'espace ? » plutôt que comme suit : « Que doit être l'espace pour qu'on puisse le regarder comme une grandeur quelconque ? » Il ne conçoit pas non plus (il est vrai que bien peu de savants le concevaient à son époque) qu'on puisse construire une géométrie complète qui ne traite en aucune façon l'espace comme une grandeur. Aussi, bien qu'il ait défini la nature des grandeurs spatiales de la manière la plus satisfaisante pour les besoins de l'Analyse, sa définition de l'espace comme une espèce de multiplicité laisse dans l'obscurité le vrai fondement de cette nature, qui réside dans la nature de l'espace conçu comme un système de relations, et est antérieure à la possibilité de le regarder comme un ensemble de grandeurs quelconque.

Arrivons maintenant au développement mathématique des idées de Riemann. Nous l'avons vu déclarer que la mesure consiste dans la superposition des quantités à comparer. Mais, continue-t-il, pour que la superposition puisse être un moyen de déterminer des quantités, il faut que ces quantités soient indépendantes de leur position dans la multiplicité (p. 259). Cela peut arriver, dit-il, de plusieurs manières : et, pour choisir la plus simple de toutes, il suppose que la longueur des lignes est indépendante de leur position. On serait bien aise de connaître quels autres moyens sont possibles ; pour ma part, je ne puis imaginer aucune autre hypothèse où la grandeur serait indépendante du lieu. Mais passons outre ; par le fait que la mesure consiste dans la superposition, le problème devient identique à la détermination de la multiplicité la plus générale où les grandeurs soient indépendantes du lieu. Cela nous amène à l'autre notion fondamentale de Riemann, qui me paraît encore plus fructueuse en Géométrie que celle de la multiplicité.

20. (2) **Courbure** ([1]). — Cette notion est due à Gauss, mais il ne l'avait appliquée qu'aux surfaces; la nouveauté, dans la dissertation de Riemann, consiste à l'étendre à une multiplicité à n dimensions. Mais cette extension est assez brièvement et obscurément exprimée, et a été encore plus obscurcie par les essais d'exposition populaire qu'en a faits Helmholtz. Le terme *courbure*, en outre, prête à l'équivoque, de sorte que cette expression a été la source de plus de malentendus, même parmi les mathématiciens, que toute autre en Pangéométrie. On a souvent oublié, malgré l'assertion explicite de Helmholtz ([2]), que la *courbure* d'une multiplicité à n dimensions est une expression purement analytique, qui n'a qu'une affinité symbolique avec la courbure ordinaire. Si on l'applique à l'espace à trois dimensions, c'est une erreur complète que de croire qu'elle implique un espace *plan* à quatre dimensions; aussi emploierai-je généralement, à la place, le terme *constante spatiale* ([3]). Néanmoins, comme cette notion est née historiquement de celle de la courbure, je vais exposer très briève-

---

([1]) Nous traduisons simplement par *courbure* l'expression anglaise *measure of curvature*, qui correspond à l'allemand *Krümmungsmass* et au latin *mensura curvaturæ*. M. Jordan, adoptant dans son *Cours d'Analyse* la terminologie de Gauss, entend par courbure totale (*curvatura totalis seu integra*) d'une portion de surface continue circonscrite par une courbe fermée, l'aire σ' de son *image sphérique*, c'est-à-dire de la portion de surface découpée sur la sphère de rayon 1 par les rayons menés parallèlement aux normales à la surface en tous les points de la courbe fermée. Il appelle *courbure moyenne* de cette même portion de surface (finie) le rapport de l'aire σ' de son image sphérique à son aire propre σ. Enfin, il définit *la courbure de la surface en un point* (*mensura curvaturæ* de Gauss), la limite vers laquelle tend la courbure moyenne d'une portion de surface qui contient ce point et qui tend à s'y réduire. C'est cette dernière quantité qui est égale au produit des deux courbures principales de la surface, c'est-à-dire à l'inverse du produit des rayons de courbure principaux au point considéré. Si k est la courbure en chaque point ou élément de surface $d\sigma$, la courbure totale d'une surface finie est $\int k\, d\sigma$, intégrale étendue à tous les éléments de cette surface. En particulier, la courbure totale d'un triangle formé par trois lignes géodésiques est égale à l'*excès* (positif ou négatif) de la somme de ses angles sur deux droits. On sait d'ailleurs que c'est cet excès qui mesure l'aire d'un triangle sphérique sur la sphère de rayon 1. (*Note de M. L. Couturat.*)

([2]) *Vorträge und Reden*, t. II, p. 18.

([3]) *Cf.* Klein, *Nicht-Euklid*, t. I, p. 160.

ment le développement historique des théories de la courbure.

De même que la notion de *longueur* a été originairement tirée de la ligne droite, et étendue aux autres courbes en les divisant en lignes droites infiniment petites, de même la notion de *courbure* est dérivée du cercle, et a été étendue aux autres courbes en les divisant en arcs de cercle infiniment petits. La courbure peut être regardée, en principe, comme la mesure de la quantité dont une courbe s'éloigne de la ligne droite; dans un cercle, qui reste partout identique à lui-même, cette quantité est évidemment constante, et est mesurée par l'inverse du rayon. Mais, dans toutes les autres courbes, la grandeur de la courbure varie d'un point à l'autre, de sorte qu'elle ne peut être mesurée sans le secours des infiniment petits. La mesure qui se présente tout naturellement est la courbure du cercle qui coïncide le plus approximativement avec la courbe au point considéré. Comme un cercle est déterminé par trois points, ce cercle sera celui qui passe par trois points consécutifs de la courbe. On a ainsi défini la courbure d'une courbe quelconque, plane ou gauche; car, puisque trois points quelconques se trouvent dans un plan, un tel cercle peut toujours être décrit.

Si nous passons maintenant aux surfaces, ce dont nous avons besoin est, par analogie, une mesure de la quantité dont elles s'éloignent du plan. La courbure, telle qu'on l'a définie plus haut, est devenue indéterminée, car par un point quelconque de la surface on peut mener une infinité d'arcs qui, en général, n'auront pas tous la même courbure. Menons alors toutes les lignes géodésiques qui joignent le point considéré aux points voisins de la surface dans toutes les directions. Puisque ces arcs forment une multiplicité simplement infinie, il y aura parmi eux, s'ils n'ont pas tous la même courbure, un arc de courbure maxima et un arc de courbure minima [1]. Le produit de ces courbures maxima et minima s'appelle la *courbure* de la surface au point considéré. Éclairons cela par

---

[1] Puisque nous considérons la courbure en un point, nous n'avons à considérer que les premiers éléments infinitésimaux des lignes géodésiques qui partent de ce point.

quelques exemples simples : sur une sphère, la courbure de toutes les lignes géodésiques est égale à l'inverse du rayon de la sphère; par suite, la courbure de la surface en un point quelconque est le carré de l'inverse du rayon. Toutes les surfaces, telles que le cône ou le cylindre, qui ont des lignes droites pour lignes de courbure ([1]), ont une courbure nulle en tous les points, attendu que des lignes droites n'ont pas de courbure; c'est le cas, en particulier, pour le plan. Mais, en général, la courbure d'une surface varie d'un point à l'autre.

Gauss, l'inventeur de cette notion ([2]), a prouvé que pour que deux surfaces puissent être développables l'une sur l'autre (c'est-à-dire soient telles que l'une puisse être appliquée sur l'autre sans extension ni déchirure), il faut que les deux surfaces aient des courbures égales aux points correspondants. Lorsqu'il en est ainsi, toute figure qui est possible sur l'une est, en général, possible sur l'autre, et les deux surfaces ont pratiquement la même géométrie ([3]). On en déduit ce corollaire, que la constance de la courbure est une condition nécessaire de la libre mobilité des figures sur une surface quel-

---

([1]) De telles surfaces sont dites *développables,* parce qu'elles sont applicables sur un plan sans déchirure ni duplicature. Elles peuvent être considérées comme engendrées par la tangente à une courbe gauche, et leurs génératrices sont en même temps des lignes de courbure. Il ne faut pas les confondre avec les surfaces *réglées,* engendrées par une droite qui se déplace d'une manière quelconque dans l'espace, car les génératrices de celles-ci ne sont pas, en général, des lignes de courbure, de sorte que ces surfaces ont une courbure non nulle (négative). (*Note de M. L. Couturat.*)

([2]) *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (*Œuvres*, t. IV, pp. 219-258; 1827).

([3]) Néanmoins, les géométries des différentes surfaces d'égale courbure sont sujettes à des différences importantes. Par exemple, le cylindre est une surface de courbure nulle, mais comme ses lignes de courbure dans une direction sont finies, sa géométrie ne coïncide avec celle du plan que pour des longueurs plus petites que la circonférence de son cercle générateur (*voir* Veronese, *op. cit.*, p. 644). Deux lignes géodésiques d'un cylindre peuvent se rencontrer en plusieurs points. Pour les surfaces de courbure nulle où cela n'est pas possible, on peut admettre que l'identité avec le plan subsiste. Dans les autres cas, l'identité s'étend seulement aux propriétés des figures qui ne dépassent pas une certaine grandeur.

conque (¹). Minding a prouvé que cette condition est non seulement nécessaire, mais suffisante (²).

21. Jusqu'ici nous n'avons rencontré aucune difficulté, car nous n'avons traité que des idées purement géométriques par des procédés purement géométriques; mais nous n'avons encore trouvé pour la notion de courbure aucun sens dans lequel elle puisse être étendue à l'espace, encore moins à une multiplicité à n dimensions. Pour cela, il faut étudier la méthode de Gauss, qui nous permet de déterminer la courbure d'une surface en un point quelconque comme une propriété inhérente à cette surface, et complètement indépendante de toute référence à la troisième dimension.

Pour obtenir une détermination intrinsèque de la courbure, la méthode est brièvement la suivante : Si un point quelconque de la surface est déterminé par deux coordonnées u et v, les arcs infiniment petits sur la surface sont donnés par la formule

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

où E, F, G sont, en général, des fonctions de u et de v (³). Au moyen de cette formule seule, et sans se référer à aucun espace extérieur à la surface, on peut déterminer la courbure au point (u, v), en fonction de E, F, G et de leurs différentielles par rapport à u et à v (⁴). On peut dès lors regarder la courbure d'une surface comme une propriété inhérente à cette surface elle-même, et renoncer à la définition géométrique précédente, qui impliquait une référence à la troisième dimension. Mais ici une

---

(¹) En effet, on peut considérer deux parties différentes de la même surface comme des parties correspondantes de surfaces différentes; la proposition précitée montre alors qu'une figure peut être reproduite dans une certaine partie lorsqu'elle a été tracée dans une autre, si les courbures coïncident dans les deux parties.

(²) *Journal de Crelle*, t. XIX, XX; 1839-1840.

(³) Dans cette formule, u et v peuvent être les longueurs de lignes menées sur la surface, ou les angles que font ces lignes entre elles, et n'avoir par suite aucun rapport nécessaire à la troisième dimension.

(⁴) *Voir* à l'Appendice la note mathématique sur la *courbure*.

précaution est nécessaire. On verra dans le Chapitre III (§ 176) qu'il est logiquement impossible d'établir un système précis de coordonnées, où les coordonnées représentent des grandeurs spatiales, sans l'axiome de libre mobilité, et cet axiome, comme nous venons de le voir, ne s'applique aux surfaces que lorsque leur courbure est constante. Par suite, notre définition de la courbure ne sera *réellement* affranchie de toute référence à la troisième dimension que quand nous considérerons une surface de courbure constante (condition que Riemann avait entièrement méconnue). Cette précaution, toutefois, s'applique seulement à l'espace; et si nous regardons le système de coordonnées comme impliqué dans le concept d'une multiplicité, nous pouvons la négliger entièrement, pourvu que nous nous rappelions que la possibilité d'un système de coordonnées dans l'espace présuppose des axiomes qui devront être recherchés plus tard. Nous voyons ainsi comment, sans référence à aucune dimension supérieure, on peut trouver un sens pour la courbure constante de l'espace à trois dimensions, ou pour une courbure quelconque d'une multiplicité à n dimensions en général.

22. Un tel sens est fourni par la dissertation de Riemann, à laquelle nous pouvons maintenant revenir après cette longue digression. On peut définir une multiplicité continue comme un ensemble continu d'éléments, tel que chaque élément soit défini par n variables continues. Cette définition n'englobe pas en réalité l'espace, car les coordonnées dans l'espace ne définissent pas, à proprement parler, un point, mais ses relations à l'origine, qui est elle-même arbitraire. Elle comprend, toutefois, le concept analytique de l'espace dont Riemann s'occupe, et peut, par conséquent, être admise comme valable pour le moment. Riemann suppose alors que la différence (ou distance, comme on peut l'appeler dans un sens vague) entre deux éléments quelconques est comparable, sous le rapport de la grandeur, à la différence entre deux autres éléments quelconques. Il suppose, en outre, ce que Helmholtz a eu le mérite de prouver, que la différence ds entre deux éléments consécutifs peut être

exprimée par la racine carrée d'une fonction quadratique des différences des coordonnées, c'est-à-dire

$$ds^2 = \Sigma_1^n \Sigma_1^n a_{ik} dx_i dx_k,$$

où les coefficients a_{ik} sont, en général, des fonctions des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (¹). La question est celle-ci : Comment pouvons-nous obtenir une définition de la courbure en partant de cette formule? Il faut remarquer, en premier lieu, que, de même que dans une surface on trouve un nombre infini de rayons de courbure en un point, de même, dans une multiplicité à trois dimensions ou plus, on trouve forcément un nombre infini de courbures en un point, à savoir une pour chaque multiplicité à deux dimensions passant par ce point et contenue dans la multiplicité supérieure. La première chose à faire, par suite, c'est de définir une telle multiplicité à deux dimensions. Elle devra consister, comme nous l'avons vu sur la surface, en une série simplement infinie de lignes géodésiques passant par ce point. Or une ligne géodésique est complètement déterminée par un point et par sa direction en ce point, ou par un point et le point infiniment voisin. Donc une ligne géodésique passant par le point considéré est déterminée par les rapports des accroissements des coordonnées, $dx_1, dx_2, dx_3, \ldots, dx_n$. Supposons qu'on ait deux de ces lignes géodésiques pour lesquelles les accroissements de x_i soient respectivement $d'x_i$ et $d''x_i$. Alors toutes les lignes géodésiqus fournies par l'expression

$$dx_i = \lambda' d'x_i + \lambda'' d''x_i$$

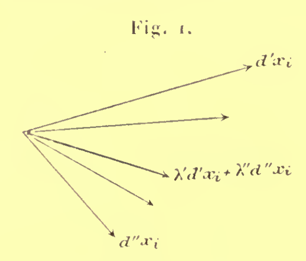
forment une série simplement infinie, puisqu'elles dépendent d'un seul paramètre, à savoir $\lambda' : \lambda''$. Une telle série de lignes géodésiques doit donc former une multiplicité à deux dimensions (*fig.* 1), ayant une courbure dans le sens ordinaire de Gauss. Cette courbure peut être tirée de la formule donnée plus

---

(¹) Dans ce qui suit, j'ai adopté la manière dont Klein expose Riemann, de préférence à celle de Riemann lui-même. La première est beaucoup plus claire et plus complète, et ne diffère nullement, en substance, de la seconde. *Voir* KLEIN, *Nicht-Euklid*, t. I, p. 206 et suiv.

haut pour l'arc élémentaire, au moyen de la formule générale de Gauss dont on a fait précédemment mention. On obtient ainsi un nombre infini de courbures en un point, mais on peut les déduire toutes de $\frac{n(n-1)}{2}$ d'entre elles (¹). Lorsque toutes les courbures en un point sont constantes et égales à toutes les courbures en un autre point quelconque, on a ce que Rie-

Fig. 1.



mann appelle une *multiplicité de courbure constante*. Dans une telle multiplicité, la libre mobilité est possible et les positions ne diffèrent pas intrinsèquement l'une de l'autre. Si a est la mesure de la courbure, la formule qui donne la longueur de l'arc devient

$$ds^2 = \frac{\Sigma\, dx^2}{\left(1 + \frac{a}{4}\Sigma x^2\right)^2}.$$

Dans ce cas seulement, comme je l'ai montré plus haut, le terme de « courbure » peut être proprement appliqué à l'espace sans se référer à une dimension supérieure, puisque la libre mobilité est logiquement indispensable à l'existence de la Géométrie quantitative ou métrique.

23. Les résultats mathématiques de la dissertation de Riemann peuvent être résumés comme suit. En supposant qu'il soit possible d'appliquer la grandeur à l'espace, c'est-à-dire de déterminer ses éléments et figures au moyen de quantités algébriques, il s'ensuit que l'espace peut être compris sous le

(¹) RIEMANN, *Gesammelte Werke*, p. 262. *Œuvres mathématiques* (Gauthier-Villars), p. 292. Tirage à part (Hermann), p. 12.

concept de multiplicité, en tant que système d'éléments quantitativement déterminables. Mais, à cause de la nature particulière de la mesure spatiale, la détermination quantitative de l'espace postule que les grandeurs soient indépendantes du lieu; et si cela n'était pas le cas, nos mesures seraient nécessairement inexactes. Si maintenant on admet que la relation quantitative de distance entre deux éléments s'exprime par la racine carrée d'une fonction quadratique des coordonnées (formule prouvée dans la suite par Helmholtz et Lie), il s'ensuit que, les grandeurs étant indépendantes du lieu, l'espace doit avoir une courbure constante, dans les limites de l'observation; en d'autres termes, il doit être homogène dans toutes ses parties. Riemann dit (p. 267) que, dans l'infiniment petit, l'observation ne peut pas découvrir si la courbure s'écarte de la constance; mais il n'essaie pas de montrer comment la Géométrie pourrait rester possible en de telles circonstances, et la seule géométrie qu'il ait construite est fondée entièrement sur la libre mobilité. J'essaierai de prouver, dans le Chapitre III, l'impossibilité logique de toute géométrie métrique qui chercherait à se passer de cet axiome. Pour le moment, je me contente de remarquer que Riemann, malgré le désir qu'il avait de prouver qu'on peut se passer de tous les axiomes, en a néanmoins conservé trois fondamentaux, dans son œuvre mathématique, à savoir : la libre mobilité, le nombre entier fini de dimensions et l'axiome qui affirme que deux points ont entre eux une relation unique, à savoir la distance. Ces axiomes, comme nous le verrons plus loin, ont été conservés, en fait, par tous les métagéomètres métriques dans leurs travaux mathématiques, même lorsqu'ils croyaient, comme Riemann et Helmholtz, qu'il n'y a pas d'axiomes philosophiquement indispensables.

24. Helmholtz, le successeur immédiat de Riemann dans l'ordre historique, fut guidé par une philosophie empiriste semblable et arriva, d'une manière indépendante, à formuler les axiomes par une méthode tout à fait analogue. Quoique Helmholtz n'ait rien publié sur ce sujet qu'après la mort de Riemann,

il n'a eu que juste le temps de voir la dissertation de Riemann (publication posthume), et il produisit aussitôt les résultats auxquels il était alors arrivé, indépendamment de ceux de Riemann et de Lobatchevsky. Helmholtz est de beaucoup l'auteur le plus lu en Métagéométrie, et ses écrits, presque seuls, représentent, pour les philosophes, les vues mathématiques modernes sur ce sujet. Mais, dans ce domaine, son importance est bien plus grande comme philosophe que comme mathématicien; on peut dire que le seul résultat mathématique original qu'il ait obtenu, en ce qui concerne la Géométrie, est la démonstration de la formule de Riemann pour l'arc infinitésimal, et encore cette démonstration était loin d'être rigoureuse, jusqu'à ce que Lie l'eût modifiée par sa méthode des groupes continus. Aussi, dans ce Chapitre, nous n'aurons à nous occuper que de deux de ses écrits : ce sont les deux articles des *Wissenschaftliche Abhandlungen*, vol. II, intitulés respectivement : *Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie* (p. 610 et suiv.; 1866), et *Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen* (p. 618 et suiv.; 1868) (¹).

25. Dans le premier de ces articles, qui est surtout philosophique, Helmholtz donne des indications sur son travail mathématique alors inachevé, mais, en somme, il se contente d'énoncer des résultats. Il annonce qu'il démontrera la formule quadratique de Riemann pour l'arc infinitésimal; mais, pour cela, dit-il, nous devons *partir* de la congruence, puisque, sans elle, toute mesure spatiale serait impossible. Il soutient, néanmoins, que la congruence est prouvée par l'expérience. Quant à savoir comment, sans l'aide de la mesure, nous pourrions découvrir des infractions à la congruence, c'est un point qu'il ne discute

(¹) *Sur les principes de fait de la Géométrie. Sur les faits qui servent de base à la Géométrie.* Ce dernier Mémoire a été traduit par J. Houel dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. IV; 1868. Réimprimé par Hermann en Appendice à Lobatchevsky : *Recherches géométriques sur la théorie des parallèles*, p. 372 à 378. Paris; 1895.

pas. Il énonce alors les quatre axiomes qu'il considère comme essentiels à la Géométrie, de la manière suivante :

I. *Touchant la continuité et les dimensions :* Dans un espace à n dimensions, un point est déterminé d'une manière unique par la mesure de n variables continues (coordonnées).

II. *Touchant l'existence de corps rigides mobiles :* Entre les $2n$ coordonnées de chaque couple de points d'un corps rigide, il existe une équation qui est la même pour tous les couples congruents ([1]). En considérant un nombre suffisant de couples de points, on obtient plus d'équations que d'inconnues ; cela fournit un moyen de déterminer la forme de ces équations, de manière à les rendre compatibles entre elles ([2]).

III. *Touchant la libre mobilité :* Chaque point peut passer librement et d'une manière continue d'une position à une autre. Des axiomes II et III il résulte que, si deux systèmes A et B peuvent être amenés à coïncider dans une certaine position, cela est encore possible dans toute autre position.

IV. *Touchant l'indépendance de la rotation dans les corps rigides* (Monodromie) : Si $(n-1)$ points d'un corps restent fixes, de telle sorte que chaque autre point ne puisse décrire qu'une courbe déterminée, alors cette courbe est fermée.

Ces axiomes, dit Helmholtz, joints à l'axiome des trois dimensions, suffisent à démontrer que les systèmes euclidien et non-euclidiens sont les seuls possibles. On ne peut pas nier qu'ils soient mathématiquement suffisants; mais ils semblent, à quelques égards, être surabondants. En premier lieu, il n'y a aucune nécessité d'appliquer l'axiome de la congruence aux corps rigides réels (je développerai ce sujet dans le Chapitre II) ([3]). En outre, il n'est guère besoin de formuler spécialement la

---

([1]) *Voir* à l'Appendice la note mathématique sur la *congruence*.

([2]) C'est-à-dire de manière qu'elles puissent être vérifiées toutes à la fois. (*Note de M. L. Couturat.*)

([3]) *Voir* §§ 69 à 73.

libre mobilité comme distincte de la congruence : quelle barrière l'espace vide pourrait-il offrir au mouvement d'un point? L'axiome est impliqué dans l'homogénéité de l'espace, qui n'est pas autre chose que l'axiome de la congruence. La monodromie aussi a été sévèrement critiquée; non seulement il est évident qu'elle peut être englobée dans la congruence, mais, même au point de vue purement analytique, Sophus Lie a prouvé qu'elle est superflue ([1]). Ainsi, l'axiome de la congruence, correctement formulé, enveloppe les troisième et quatrième axiomes de Helmholtz et une partie du second. Tous les quatre, ou plutôt tous ceux d'entre eux qui concernent proprement la Géométrie, sont, comme nous le verrons plus tard, des conséquences du seul principe fondamental de la relativité de la position.

26. Le second article, qui est en grande partie mathématique, fournit la démonstration promise de la formule de l'arc, ce qui est la plus importante contribution de Helmholtz à la Géométrie. Riemann avait *admis* cette formule comme la plus simple parmi toutes celles qui étaient possibles : Helmholtz a prouvé qu'elle est une conséquence nécessaire de ses axiomes. Cet article commence par un court résumé du premier, comprenant l'énoncé des axiomes, auxquels il en ajoute encore à la fin deux autres, à savoir : V, que l'espace a trois dimensions, et VI, que l'espace est infini. Il est supposé dans le texte, comme aussi dans le premier article, que la courbure de l'espace ne peut pas être négative, et, en conséquence, qu'un espace infini est nécessairement euclidien. Cette erreur des deux articles est corrigée dans des notes ajoutées après l'apparition de l'article de Beltrami sur la courbure négative. C'est un échantillon du caractère peu professionnel du travail mathématique de Helmholtz sur ce sujet, qui a inspiré à Klein les remarques suivantes ([2]) : « Helmholtz n'est pas un mathématicien de profession, mais un physicien et un physiologiste.... De cette incom-

([1]) *Grundlagen der Geometrie,* t. I et II, *Leipziger Berichte*, 1890; *voir* la fin du présent Chapitre, § 45.

([2]) *Nicht-Euklid,* t. I, p. 258-259.

pétence mathématique de Helmholtz il suit naturellement qu'il n'a pas traité la partie mathématique de son travail avec la rigueur qu'on exigerait d'un mathématicien de profession (*von Fach*). » Il nous apprend lui-même que c'est l'étude physiologique de la vision qui l'a conduit à cette question des axiomes, et c'est en physicien qu'il rapporte ses axiomes aux corps rigides réels. C'est pourquoi nous trouvons dans ses travaux mathématiques des erreurs, telles que l'axiome de monodromie, et la supposition que la courbure de l'espace doit être positive : néanmoins, la démonstration de la formule de l'arc de Riemann est extrêmement habile, et a été, somme toute, confirmée par les recherches plus profondes de Lie.

27. Les autres écrits de Helmholtz sur la Géométrie sont presque entièrement philosophiques, et seront discutés tout au long dans le Chapitre II. Pour le moment, nous pouvons passer au seul autre auteur important de la seconde période, Beltrami. Comme son œuvre est purement mathématique et contient peu de points controversés, il est inutile, malgré sa grande importance, de nous y arrêter longtemps.

L'article intitulé : *Saggio di Interpretazione della Geometria non-euclidea* (¹), qui est restreint, en principe, aux deux dimensions, interprète les résultats de Lobatchevsky par la méthode caractéristique de la seconde période. Il montre, en développant le travail de Gauss et de Minding (²), que toutes les propositions que Lobatchevsky avait établies en Géométrie plane sont valables, dans l'espace euclidien ordinaire, sur les surfaces de courbure constante négative. Il est étrange, comme Klein l'a montré (³), que cette interprétation, qui était connue de Riemann et peut-être même de Gauss, soit restée aussi longtemps sans démonstration explicite. C'est d'autant plus

(¹) *Giornale di Matematiche*, t. VI, 1868. Traduit en français par J. Houël dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. VI ; 1869.

(²) *Journal de Crelle*, t. XIX, XX ; 1839, 1840.

(³) *Nicht-Euklid*, t. I, p. 190.

étrange que la *Géométrie imaginaire* de Lobatchevsky a paru dans le tome XVII du *Journal de Crelle* ([1]), et que l'article de Minding, duquel l'interprétation résulte immédiatement, a paru dans le Tome XIX du même *Journal*. Minding avait montré que la Géométrie des surfaces de courbure constante négative, en particulier en ce qui concerne les triangles géodésiques, peut se déduire de celle de la sphère en donnant au rayon une valeur purement imaginaire *ia* ([2]). Ce résultat, comme nous l'avons vu, avait été aussi obtenu par Lobatchevsky pour sa Géométrie, et pourtant il fallut trente ans pour que la connaissance de cette relation devînt générale.

28. Dans l'*Essai* de Beltrami, les lignes droites sont naturellement remplacées par des lignes géodésiques; les coordonnées sont obtenues au moyen d'une correspondance point par point avec un plan auxiliaire dont les lignes droites correspondent aux lignes géodésiques de la surface. De la sorte, les géodésiques ont des équations linéaires, et sont toujours déterminées d'une manière unique par deux points; mais les distances sur la surface ne sont pas égales aux distances sur le plan; ainsi, tandis que la surface est infinie, la portion correspondante du plan est contenue dans un certain cercle fini. La distance de deux points sur la surface est une certaine fonction des coordonnées, mais non la fonction ordinaire de la Géométrie élémentaire. Cette corrélation entre le plan et la surface est importante par sa connexité avec la théorie de la distance de Cayley, que nous aurons à considérer bientôt. Si l'on définissait la distance sur le plan par cette fonction des coordonnées qui donne la distance correspondante sur la surface, on obtiendrait ce que Klein appelle un *plan avec un système*

([1]) Cet article a un caractère plus trigonométrique et plus analytique que le Livre allemand, et par suite rend l'interprétation précitée particulièrement évidente.

([2]) De telles surfaces ne sont en aucune manière d'une nature particulièrement abstruse. Une d'elles, par exemple, est engendrée par la révolution de la tractrice ordinaire :

$$x = a\sin\varphi, \qquad y = a\left(\log\tang\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right).$$

de mesures (*Massbestimmung*) *hyperbolique*, pour lequel vaudrait la théorie de la distance de Cayley. Mais il est évident que la notion ordinaire de distance a été présupposée en établissant le système de coordonnées, de sorte que l'on n'obtient pas réellement des géométries différentes sur un seul et même plan. L'importance de ces remarques apparaîtra plus pleinement lorsque nous viendrons à étudier Cayley et Klein.

29. La valeur de l'*Essai* de Beltrami consiste, à ses propres yeux, à donner un sens euclidien intelligible à la Géométrie plane de Lobatchevsky : le système correspondant de Géométrie dans l'espace est simplement mentionné dans ce travail, parce qu'il n'a pas de sens pour l'espace euclidien ; mais, dans un second article ([1]), presque contemporain du premier, il arrive à considérer la théorie générale d'une multiplicité à n dimensions de courbure constante négative. Cet article est grandement influencé par la dissertation de Riemann ; il commence par la formule de l'élément linéaire, et en déduit, premièrement, que la congruence vaut pour de tels espaces, et ensuite que, conformément à la définition de Riemann, ils ont une courbure constante négative. (Il est instructif d'observer que, tant dans cet article que dans le précédent *Essai*, l'Auteur insiste très fortement sur la nécessité de l'axiome de la congruence.)

Ce Travail a moins d'intérêt que le premier, au point de vue philosophique, car il ne fait guère que répéter sous une forme générale les résultats auxquels l'*Essai* était arrivé pour deux dimensions ; résultats qui, étendus à n dimensions, tombent au niveau de pures constructions mathématiques ; néanmoins, cet article est important, d'une part, parce qu'il a restauré la courbure négative, qui avait été méconnue par Helmholtz ; d'autre part, parce qu'il a traité analytiquement les résultats de Lobatchevsky, par où (joint à l'*Essai*) il leur a enfin rendu la prééminence qu'ils méritaient.

([1]) *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante* (*Annali di Matematica*, t. II, vol. II ; 1868-1869). Traduit aussi par J. Houël, *loc. cit.*

TROISIÈME PÉRIODE.

30. La troisième période diffère radicalement de la période précédente tant par ses méthodes et ses visées que par les idées philosophiques qui l'inspirent; tandis que, dans la seconde période, tout se ramenait à la mesure, avec son appareil de congruence, de libre mobilité, de corps rigides et le reste, tout cela disparaît complètement dans la troisième période qui, sautant à l'extrémité opposée, regarde la grandeur comme une catégorie parfaitement étrangère à la Géométrie, et se passe de la congruence et de la méthode de superposition. Les idées de cette période n'ont pas trouvé, malheureusement, des interprètes aussi philosophes que Riemann et Helmholtz; elles n'ont été exposées que par des mathématiciens de profession. De plus, le changement des idées fondamentales, qui est immense, n'a pas apporté un changement aussi grand dans les procédés techniques; car, quoique la grandeur spatiale ne fasse plus partie de la Géométrie projective, on emploie encore la grandeur, et l'on a encore des équations, des transformations algébriques et tout ce qui s'ensuit. Cela est fait pour donner naissance à des confusions, spécialement dans l'esprit de l'étudiant, qui ne s'aperçoit pas que, en tant que les propositions sont vraiment projectives, les grandeurs qui y figurent sont de simples noms attribués aux points, et non, comme en Géométrie métrique, des quantités spatiales réelles.

Néanmoins, la différence fondamentale entre cette période et la précédente ne peut manquer de frapper tout de suite : tandis que Riemann et Helmholtz ne maniaient que des idées métriques et prenaient pour fondement la mesure de la courbure et la formule de l'élément linéaire (toutes deux purement métriques), la nouvelle méthode est fondée sur les formules de transformation des coordonnées destinées à exprimer une collinéation donnée. Elle commence par réduire toutes les notions dites *métriques* (distance, angle, etc.) à des formes projectives, et obtient par là une unité de méthode et une simplicité auparavant impossibles. Seulement, cette réduction repose,

excepté quand la constante spatiale est négative, sur des figures imaginaires (les points circulaires à l'infini, dans la Géométrie euclidienne); elle est, en outre, purement symbolique et analytique, et doit être regardée comme n'ayant aucune portée philosophique. Comme la question de savoir quelle est la valeur de cette réduction est d'une importance capitale pour notre théorie de la Géométrie, et comme Cayley, dans son Adresse présidentielle à l'*Association britannique* en 1883, a formellement invité les philosophes à discuter l'emploi des imaginaires, dont dépend cette question, je la traiterai avec quelque étendue. Mais d'abord voyons comment s'effectue cette réduction au point de vue mathématique.

31. Nous trouverons, dans toute cette période, que presque chaque proposition importante, tout en prêtant à confusion par son sens apparent, a néanmoins une grande portée philosophique, lorsqu'elle est correctement interprétée. Il en est ainsi de l'œuvre de Cayley, l'initiateur de la méthode projective.

La formule projective pour les angles, en Géométrie euclidienne, fut trouvée pour la première fois par Laguerre en 1853; mais cette formule a un caractère parfaitement euclidien, et il était réservé à Cayley de la généraliser de manière à y comprendre à la fois les angles et les distances dans les systèmes euclidien et non-euclidiens indifféremment ([1]).

Cayley fut, jusqu'à la fin, un ferme champion de l'*espace* euclidien, quoiqu'il crût que les *Géométries* non-euclidiennes peuvent s'appliquer à l'espace euclidien en modifiant la définition de la distance ([2]); il a ainsi, malgré son orthodoxie euclidienne, fourni aux partisans de la possibilité des espaces non-euclidiens une de leurs armes les plus fortes. Dans son *Sixth Memoir upon Quantics* (1859), il s'impose la tâche

---

([1]) *Voir* Klein, *Nicht-Euklid*, t. I, p. 47 et suiv., et les références qui y sont données.

([2]) *Voir* plus bas la citation de son Adresse à l'*Association britannique*.

« d'établir la notion de distance sur des principes purement descriptifs ». Il montre que la notion ordinaire de distance peut être rendue projective par référence aux points circulaires à l'infini et à la droite de l'infini, et qu'il en est de même pour les angles ([1]). Non content de cela, il propose une nouvelle définition de la distance par l'inverse du sinus ou du cosinus d'une certaine fonction des coordonnées ([2]); avec cette définition, les propriétés ordinairement connues comme métriques deviennent des propriétés projectives, par rapport à une certaine conique que Cayley appelle l'*Absolu*. (Les points circulaires sont, analytiquement, une conique dégénérée, de sorte que la Géométrie ordinaire forme un cas particulier de cette Géométrie.) Il prouve que, lorsque l'Absolu est une conique *imaginaire*, la Géométrie à deux dimensions ainsi obtenue est la Géométrie sphérique; il n'a pas établi la correspondance avec la Géométrie de Lobatchevsky, dans le cas où l'Absolu est *réel;* en effet, il ne montre nulle part qu'il a connaissance des systèmes non-euclidiens. La portée du Mémoire, pour Cayley, consiste entièrement à prouver que la Géométrie métrique n'est qu'une branche de la Géométrie descriptive.

32. C'est Klein qui le premier fit ressortir la connexité de la théorie de la distance de Cayley avec la Métagéométrie ([3]). Klein montra en détail que, si l'Absolu est réel, on a le système hyperbolique de Lobatchevsky; s'il est imaginaire, on obtient, soit la Géométrie sphérique, soit une nouvelle Géométrie, analogue à celle de Helmholtz, et que Klein nomma *elliptique;* si l'Absolu se réduit à un couple de points imaginaires, on a une Géométrie parabolique, et si, en particulier, ce couple est formé des points circulaires à l'infini, on retrouve la Géométrie ordinaire d'Euclide. Dans la Géométrie elliptique, deux lignes droites d'un

---

([1]) *Cf.* la première phrase, due à Cayley, des *Courbes planes de degré supérieur* de Salmon.

([2]) *Voir* à l'Appendice la Note de l'Auteur intitulée : *Constante spatiale.* (*Note du traducteur.*)

([3]) Voir *Nicht-Euklid,* t. I, chap. I et II.

même plan se rencontrent en un seul point, et non en deux comme dans le système de Helmholtz. La distinction entre ces deux espèces de Géométrie est difficile et sera discutée plus tard.

33. Puisque ces systèmes proviennent tous du plan euclidien par un simple changement dans la définition de la distance, Cayley et Klein tendent à considérer la question tout entière comme portant, non sur la nature de l'espace, mais sur la définition de la distance. Du moment que cette définition est, à leur avis, parfaitement arbitraire, le problème philosophique s'évanouit : l'*espace* euclidien reste en possession indiscutée, et le seul problème qui subsiste est une affaire de convention et de commodité mathématique (¹). Cette opinion a été énergiquement exprimée par M. Poincaré : « Que doit-on penser de cette question : La Géométrie euclidienne est-elle vraie? elle n'a aucun sens ». D'après lui, les axiomes géométriques sont de pures conventions : ce sont « des définitions déguisées (²) ». Aussi Klein blâme Beltrami de regarder son plan auxiliaire comme purement auxiliaire, et remarque que, s'il avait connu le Mémoire de Cayley, il aurait vu que la relation entre le plan et la pseudosphère est beaucoup plus intime qu'il ne le supposait (³). Une opinion qui exclut entièrement le problème de l'arène de la philosophie appelle, évidemment, une discussion complète. C'est à cette discussion que nous allons procéder maintenant.

34. L'opinion en question est née, semble-t-il, d'une confusion assez naturelle touchant la nature des coordonnées

---

(¹) *Voir* Cayley, *Discours prononcé devant les Membres de l'Association britannique* (1883), traduit par M. Raffy, ap. *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. VIII (1884). *Voir* aussi une citation de Klein dans les *Axiome der Geometrie* d'Erdmann, p. 124, note.

(²) *Nature*, vol. XLV, p. 407. *Voir* aussi *Les Géométries non-euclidiennes*, ap. *Revue générale des Sciences pures et appliquées*, 2ᵉ année, nº 23, p. 773; 15 décembre 1891.

(³) *Nicht-Euklid*, t. I, p. 200.

employées. Ceux qui l'ont adoptée ne se sont pas suffisamment rendu compte, je crois, que leurs coordonnées ne sont pas des grandeurs *spatiales*, comme en Géométrie métrique, mais des signes purement conventionnels, qui servent à désigner distinctement les différents points. Il n'y a pas de raison, par suite, à moins qu'on n'ait déjà une Géométrie métrique, pour regarder une fonction des coordonnées comme une expression de la distance meilleure qu'une autre, tant que l'on conservera l'équation fondamentale de l'addition ([1]). Par suite, si nos coordonnées sont regardées comme suffisantes pour toute Géométrie, l'expression de la distance offre une indétermination qui ne peut être levée que par une convention; mais les coordonnées projectives (c'est la thèse que nous soutiendrons), quoique parfaitement suffisantes pour toutes les propriétés projectives, et entièrement exemptes de toute présupposition métrique, sont insuffisantes pour exprimer les propriétés métriques, précisément parce qu'elles n'impliquent aucune présupposition métrique. C'est ainsi que Beltrami peut être justifié des critiques de Klein, quand il s'agit des propriétés métriques; la réduction des propriétés métriques aux propriétés projectives n'est qu'apparente, quoique l'indépendance de ces dernières à l'égard de la Géométrie métrique soit parfaitement réelle.

35. Mais qu'est-ce que des coordonnées projectives, et comment s'introduisent-elles? Cette question n'a pas été effleurée dans le Mémoire de Cayley, et il semble, par suite, qu'il ait commis une erreur logique en employant des coordonnées pour définir la distance; car, dans tous les systèmes antérieurs, les coordonnées étaient déduites de la distance; employer un système quelconque de coordonnées préexistant pour définir la distance était, par conséquent, s'enfermer dans un cercle vicieux. Cayley mentionne cette difficulté dans une Note, mais il y remarque seulement qu'il a considéré ses coor-

---

([1]) C'est-à-dire l'équation $AB + BC = AC$, pour trois points en ligne droite.

données comme des nombres arbitrairement assignés aux différents points, suivant un certain système qu'il ne discute pas davantage. La difficulté a été traitée tout au long par Sir R. Ball [1], qui fait ressortir que si les valeurs de nos coordonnées impliquent déjà la mesure usuelle de la distance, on ne peut, sans contradiction, en donner une nouvelle définition, tout en conservant les coordonnées habituelles. Il ajoute (*op. cit.*, p. 1) : « En étudiant la Géométrie non-euclidienne, j'ai souvent éprouvé une difficulté, qui a été, je le sais, ressentie par d'autres. Dans cette théorie, il semble qu'on essaie de remplacer notre notion ordinaire de la distance de deux points par le logarithme d'un certain rapport anharmonique [2]. Mais ce rapport lui-même implique la notion de la distance mesurée à la manière ordinaire. Comment pouvons-nous alors remplacer

---

[1] *Theory of the Content* (*Transactions of the Royal Irish Academy*, 1889).

[2] Formule substituée par Klein au sinus ou cosinus inverse de Cayley. Les deux formules sont équivalentes, mais celle de Klein est de beaucoup la plus commode, au point de vue mathématique. (*Note de l'auteur.*)

Cette formule est

$$D = \frac{\log \frac{z}{z_1}}{\log \lambda},$$

ou plus simplement

$$D = c \log \frac{z}{z_1},$$

z et z_1 étant les coordonnées projectives des deux points. On peut voir que cette formule possède les propriétés essentielles qui doivent appartenir à la notion de distance :

1° Possibilité d'additionner les distances, car

$$c \log \frac{z}{z''} = c \log \frac{z}{z'} + c \log \frac{z'}{z''};$$

2° La distance d'un élément à lui-même est nulle, car

$$c \log \frac{z}{z} = 0;$$

3° La relation reste inaltérée quand on multiplie z et z_1 par un même nombre.

Voir KLEIN, *Sur la Géométrie non-euclidienne* (traduction Laugel), p. 15 et 16. (*Note du traducteur.*)

notre ancienne notion de la distance par la notion non-euclidienne, étant donné que la définition même de la dernière implique la première? »

36. On est obligé d'admettre la validité de cette objection, tant que le rapport anharmonique est défini de la manière ordinaire, c'est-à-dire métrique. Elle vaudrait, par exemple, contre toute tentative de trouver une nouvelle définition de la distance fondée sur la définition du rapport anharmonique par Cremona ([1]), définition qui le présente comme une propriété métrique invariante pour toute transformation projective. En effet, pour éviter toute faute de logique, il faut rejeter toute référence à une grandeur spatiale d'espèce quelconque; car, comme nous le montrerons plus loin ([2]), toute grandeur spatiale dépend logiquement de la grandeur fondamentale, qui est la distance. Il faut aussi définir le rapport anharmonique et les coordonnées par des propriétés purement descriptives, si l'on veut que l'usage qu'on en fera dans la suite soit affranchi de toute présupposition métrique, et par suite à l'abri des objections de Sir R. Ball.

Une telle définition a été donnée d'une manière satisfaisante par Klein ([3]), qui a recours pour cela à la construction du quadrilatère de Staudt ([4]). Au moyen de cette construction, que j'ai sommairement reproduite ([5]), on obtient une définition purement descriptive des rapports harmonique et anharmonique; de cette manière, étant donné un couple de points, on peut obtenir le conjugué harmonique d'un troisième point quelconque de la droite qui les joint. L'introduction des coordonnées projectives est fondée sur cette construction. On prend pour base trois points quelconques d'une ligne droite, et on

---

([1]) *Elements of projective Geometry*, seconde édition, Oxford, 1893. Chap. IX. Le Livre de Cremona a été traduit en français par Ed. Dewulf. Paris, Gauthier-Villars (édition épuisée).

([2]) Chapitre III, section B.

([3]) Voir *Nicht-Euklid*, t. I. p. 338 et suivantes.

([4]) *Voir* STAUDT, *Geometrie der Lage*, § 8 : *Harmonische Gebilde*.

([5]) Chapitre III, Section A, § 112 et suivants.

leur assigne arbitrairement les nombres 0, 1, ∞. On trouve ensuite le conjugué harmonique du point 0 par rapport aux points 1 et ∞, et on lui assigne le nombre 2. [Si on lui assigne ce nombre plutôt qu'un autre, c'est afin d'obtenir la valeur — 1 pour le rapport anharmonique des quatre nombres correspondant aux quatre points (¹).] On trouve ensuite le conjugué harmonique du point 1 par rapport aux points 2 et ∞, et on lui assigne le nombre 3, et ainsi de suite. Klein a montré que, par cette construction, on peut obtenir un nombre quelconque de points, et construire le point correspondant à n'importe quel nombre donné, fractionnaire ou négatif. En outre, lorsque deux files de quatre points ont le même rapport anharmonique, défini par la méthode descriptive (²), les nombres correspondants ont aussi le même rapport anharmonique. En introduisant ainsi un système de nombres sur deux droites, ou sur trois, on obtient les coordonnées d'un point quelconque du plan ou de l'espace. Cette construction, qui est d'une importance fondamentale en Géométrie projective, élude d'une manière satisfaisante la faute logique sur laquelle porte la critique de Sir R. Ball. Nos coordonnées sont introduites par une méthode purement descriptive et n'impliquent aucune espèce de présupposition touchant la mesure de la distance.

37. Avec ce système de coordonnées, on ne commet plus de cercle vicieux en définissant la distance comme une certaine fonction des coordonnées. Mais il ne s'ensuit en aucune façon que la notion de la distance soit arbitraire. Pour éviter les idées métriques, nous avons jusqu'ici exclu toute référence à la distance; mais une fois la distance introduite, les idées métriques reparaissent inévitablement, et il faut nous rappeler que

(¹) Le rapport anharmonique de quatre nombres p, q, r, s est défini par

$$\frac{(p-q)(r-s)}{(p-r)(q-s)}.$$

(²) A savoir comme transformables l'un dans l'autre par une collinéation. *Voir* Chap. III, Sect. A, § 110.

nos coordonnées ne nous donnent aucune information, à première vue, touchant l'une quelconque de ces idées métriques. Nous pouvons naturellement, si cela nous plaît, continuer à exclure la distance conçue au sens ordinaire, comme la grandeur d'une droite limitée, et définir le mot *distance* de telle manière que nous voudrons. Mais nous devrons alors trouver un nouveau nom pour le concept que ce mot désignait jusqu'ici, et nous n'aboutirons qu'à créer une confusion entre le sens *apparent* de nos propositions, pour ceux qui conservent les associations appartenant à l'ancien sens du mot, et le sens *réel*, résultant de la nouvelle signification attribuée à ce mot.

Cette confusion, je crois, a été réellement commise par ceux qui regardent la question entre Euclidiens et Métagéomètres comme portant sur la définition de la distance. La distance est une relation quantitative et, comme telle, présuppose l'identité de qualité. Mais la Géométrie projective traite uniquement de la qualité (c'est pourquoi elle est appelée *descriptive*), et elle ne peut faire aucune distinction entre deux figures qualitativement semblables. Or la similitude qualitative, en Géométrie, signifie la possibilité d'une transformation mutuelle par collinéation ([1]). Ainsi deux couples quelconques de points sur une même ligne droite sont qualitativement semblables; leur seule relation qualitative commune est la ligne droite qui est commune aux deux couples de points; et c'est précisément l'identité qualitative des relations de ces deux couples qui permet d'exprimer complètement la différence de leurs relations en termes de quantité, comme une différence de distance; mais, quand on fait abstraction de la grandeur, deux couples quelconques de points situés sur une même ligne droite apparaissent comme semblables, et il en est encore de même pour deux files de trois points, car trois points quelconques sur une ligne droite peuvent être transformés projectivement en trois autres points quelconques. C'est seulement avec *quatre* points d'une droite que l'on obtient une propriété projective qui les distingue des

---

([1]) *Voir* Chap. III, Sect. A.

autres files de quatre points, et cette propriété est leur rapport anharmonique, défini d'une manière descriptive. La Géométrie projective n'a donc aucune raison de donner un nom à la relation entre deux points, attendu que cette relation n'est rien de plus que la droite illimitée qui les contient; et quand elle introduit la notion de distance, elle la définit de la seule manière que lui permettent les principes projectifs, comme une relation entre *quatre* points. Comme elle désire néanmoins que ce mot lui permette de distinguer entre eux les différents *couples* de points, elle convient de prendre deux des quatre points comme fixes. De cette manière, les seuls éléments variables dans la distance sont les deux autres points, et la distance apparaît, conséquemment, comme une fonction de *deux* variables, à savoir les coordonnées des deux points variables. Si, de plus, on définit la distance de telle sorte que la distance soit additive (1), on obtient une fonction qui possède plusieurs des propriétés de la distance prise au sens ordinaire. Par suite, le géomètre projectif regarde cette fonction comme la seule définition convenable de la distance.

En fait, par la manière dont on a introduit les coordonnées projectives, on peut voir que *quelque* fonction de ces coordonnées doit exprimer la distance au sens ordinaire; car elles ont été introduites progressivement, de telle sorte qu'en avançant du point zéro vers le point infini les coordonnées croissent continuellement. A chaque point correspondait une coordonnée définie : par suite, à la distance de deux points variables, conçue comme une fonction qui ne dépend pas d'autres variables, doit correspondre quelque fonction définie de leurs coordonnées, puisque celles-ci sont elles-mêmes fonctions des points correspondants. La fonction étudiée ci-dessus doit donc certainement comprendre comme cas particulier la distance entendue au sens ordinaire.

Mais, du fait que les deux points fixes, requis pour déterminer notre distance au sens projectif, peuvent être arbitrairement

(1) *Voir* p. 40, note 1.

choisis, résulte la nature arbitraire et conventionnelle de la distance, telle que la conçoivent MM. Poincaré et Klein, car, bien que, notre choix une fois fait, deux points quelconques aient une distance déterminée, néanmoins, suivant le choix que nous ferons, cette distance deviendra une fonction différente des deux points variables. L'ambiguïté ainsi introduite ne peut être levée au moyen des principes projectifs; mais devons-nous en conclure qu'elle ne puisse pas réellement être levée? Ne faut-il pas plutôt en conclure que la Géométrie projective ne peut pas, par elle-même, définir adéquatement la distance? Si A, B, C sont trois points différents d'une droite, il doit exister *quelque* différence entre les relations de A à B et de A à C, car autrement, en vertu de l'identité qualitative de tous les points, B et C ne pourraient être distingués l'un de l'autre; mais une telle différence implique, entre A et B, une relation qui soit indépendante des autres points de la droite; car si l'on n'avait pas une telle relation, les autres points ne pourraient apparaître comme différents. Donc, avant de pouvoir distinguer les deux points fixes qui servent de base à la définition projective, il faut déjà supposer qu'il existe, entre deux points quelconques de notre droite, une certaine relation indépendante des autres points, et cette relation est la distance au sens ordinaire [1]. Quand on aura mesuré cette relation quantitative par les méthodes ordinaires de la Géométrie métrique, on pourra ensuite décider quels points de base il faut choisir sur la ligne, pour que la fonction projective étudiée ci-dessus ait la même valeur que la distance ordinaire; mais quand il s'agit de définir la distance au sens ordinaire, le choix de ces points de base n'est pas arbitraire, et leur introduction n'est qu'un artifice technique. La distance, au sens ordinaire, reste une relation entre *deux* points, et non entre *quatre;* et c'est faute d'avoir aperçu que le sens projectif diffère du sens ordinaire, et ne peut pas le remplacer, que sont nées les opinions de MM. Klein et Poin-

---

[1] Il s'ensuit que la réduction des propriétés métriques aux propriétés projectives (même lorsque l'Absolu est réel, comme dans la Géométrie hyperbolique) n'est qu'apparente et a une valeur purement technique.

caré. Ce n'est donc pas là une question de convention, mais une question qui porte sur les propriétés métriques irréductibles de l'espace. En résumé : les grandeurs, telles qu'elles sont employées en Géométrie projective, ne valent pas comme grandeurs spatiales; ce ne sont que des symboles conventionnels pour des relations spatiales purement qualitatives; mais la distance, en tant que grandeur, présuppose l'identité de qualité, comme condition de la comparaison quantitative. La distance, au sens ordinaire, est, en deux mots, cette relation quantitative entre deux points d'une ligne, qui permet de définir leur différence d'avec les autres points. Seulement, comme la définition projective ne peut pas distinguer une collection de moins de quatre points de toute autre collection sur la même ligne droite, la distance dépend de deux autres points en plus des deux dont elle définit la relation. Il ne reste donc aucun nom pour la distance au sens ordinaire, et plusieurs auteurs de Géométrie projective, ayant supprimé le mot, croient avoir aussi supprimé la chose, et sont enclins à affirmer que *deux* points ne peuvent avoir une relation unique. Cette confusion, en Géométrie projective, montre l'importance d'un nom, et doit nous faire regarder à deux fois avant d'admettre de nouveaux sens capables d'obscurcir une des propriétés fondamentales de l'espace.

38. Il nous reste à examiner comment les Géométries non-euclidiennes résultent de la définition projective de la distance, et comment on doit interpréter cette vue des métagéomètres. Il est à remarquer que les méthodes projectives employées par Cayley s'appliquent constamment au plan euclidien, sur lequel elles introduisent différentes mesures de la distance. De là vient que toute interprétation de ces méthodes attribue aux espaces non-euclidiens une subordination apparente, comme s'ils étaient moins indépendants que l'espace euclidien. Cette subordination ne sera pas admise dans la suite; au contraire, la corrélation des espaces non-euclidiens avec l'espace euclidien sera regardée comme ayant une certaine valeur : d'abord, parce que celui-ci a été plus longuement étudié et nous est plus fami-

lier; mais, surtout, parce que cette corrélation, correctement interprétée, prouve que les autres espaces subsistent par eux-mêmes. En discutant cette interprétation, nous pouvons nous borner principalement aux distances mesurées sur une seule ligne droite; mais il faut avoir soin de se rappeler que la définition métrique de la distance (qui, suivant l'opinion ici soutenue, est la seule définition adéquate) est la même dans les espaces euclidien et non-euclidiens; plaider en sa faveur n'est donc pas plaider en faveur d'Euclide.

Le schème projectif des coordonnées consiste en une série de nombres, dont chacun représente un certain rapport anharmonique et désigne un point et un seul, et qui vont en croissant constamment avec la distance à partir d'une origine fixe, jusqu'à ce qu'ils atteignent l'infini en arrivant à un certain point. Or Cayley a montré que, dans la Géométrie euclidienne, la distance peut être exprimée par la limite du logarithme du rapport anharmonique des deux points et des points à l'infini sur leur ligne droite (lesquels coïncident); tandis que, si l'on suppose que les points à l'infini restent distincts, on obtient la formule de la distance dans la Géométrie hyperbolique ou sphérique, suivant que ces points sont réels ou imaginaires. Il s'ensuit alors que, avec la définition projective de la distance, on obtient précisément les formules de la Géométrie hyperbolique, parabolique ou sphérique, suivant que le point auquel on assigne la valeur $+\infty$ est pris à une distance (au sens ordinaire) finie, infinie ou imaginaire du point auquel on assigne la valeur o. Notre ligne droite reste, pendant tout ce temps, une droite euclidienne ordinaire; mais on a vu que la définition projective de la distance ne concorde avec la véritable définition que lorsque les deux points auxquels elle se réfère sont convenablement choisis. Or la signification ordinaire de la distance est nécessaire aux géométries non-euclidiennes comme à la Géométrie euclidienne; en effet, c'est seulement par les propriétés métriques que ces géométries diffèrent. Par suite, si notre ligne droite *euclidienne* peut servir à figurer d'autres géométries que celle d'Euclide, elle ne peut cependant être correctement employée que par celle-ci. Toutes les fois que

nous donnons de la distance une définition différente de celle d'Euclide, nous restons dans le domaine des propriétés purement projectives, et nous n'en pouvons tirer aucun renseignement sur les propriétés métriques de notre ligne droite. Mais l'importance de cette nouvelle interprétation, en Métagéométrie, réside dans le fait qu'ayant établi d'une manière indépendante les formules métriques des espaces non-euclidiens, nous trouvons, comme dans l'*Essai* de Beltrami, que ces espaces peuvent être rapportés, par une correspondance homographique, aux points de l'espace euclidien; et cela peut s'effectuer de manière à donner, pour la distance entre deux points de notre espace non-euclidien, la mesure hyperbolique ou sphérique de la distance pour les points correspondants de l'espace euclidien.

39. Somme toute, la thèse qui paraît la plus soutenable est une modification de l'opinion de sir R. Ball, qui est pratiquement une généralisation de la méthode de Beltrami. Il imagine ce que, avec Grassmann, il appelle un *Contenu*, c'est-à-dire une multiplicité parfaitement générale à trois dimensions, et alors il fait correspondre ses éléments un par un à des points de l'espace euclidien. Chaque élément du Contenu reçoit ainsi, pour coordonnées, les coordonnées euclidiennes ordinaires du point correspondant dans l'espace euclidien. Grâce à cette corrélation, nos calculs, quoique se rapportant au Contenu, se poursuivent dans l'espace euclidien, comme dans l'*Essai* de Beltrami. La confusion disparaît alors, mais avec elle disparaît aussi la prétendue interprétation euclidienne. Si le Contenu de sir R. Ball est réellement un espace, il doit être un espace radicalement différent de celui d'Euclide (1); parler, comme Klein, de plans ordinaires avec des mesures hyperboliques ou elliptiques de la distance, c'est, ou bien commettre une contradiction, ou bien renoncer à toute signification métrique de la dis-

(1) Sir R. Ball ne regarde pas son Contenu non-euclidien comme un espace possible (voir *op. cit.*, p. 151). Sur ce point important, je me sépare de son interprétation, car je considère ce Contenu comme un espace aussi possible *a priori* que celui d'Euclide, et qui peut être actuellement vrai dans la limite des erreurs d'observation.

tance. Au lieu de plans ordinaires, on a des surfaces de courbure constante comme celles de Beltrami; au lieu de l'espace euclidien, on a un espace hyperbolique ou sphérique. Il reste vrai, cependant, que, par la méthode de Klein, on peut donner un sens euclidien à chaque proposition symbolique de la Géométrie non-euclidienne; car, en substituant à la distance le logarithme indiqué précédemment (§ 35), on tire du résultat non-euclidien un résultat qui découle des axiomes euclidiens ordinaires. Cette correspondance écarte, une fois pour toutes, la possibilité d'une contradiction latente dans la Métagéométrie, puisque, à une proposition de l'une, correspond une proposition et une seule de l'autre, et qu'à des résultats contradictoires dans un système correspondraient, par suite, des résultats contradictoires dans l'autre. La Métagéométrie ne peut donc conduire à des contradictions sans que, au même instant, la Géométrie euclidienne ne mène à des contradictions correspondantes. Ainsi le plan euclidien avec une mesure hyperbolique ou elliptique de la distance, tout en étant, soit contradictoire, soit non métrique en tant que notion indépendante, est extrêmement utile comme auxiliaire pour l'interprétation des résultats non-euclidiens.

40. Nous avons encore à discuter la troisième espèce de Géométrie non-euclidienne de Klein, qu'il appelle *elliptique*. La différence entre celle-ci et la Géométrie sphérique est difficile à saisir, mais on peut la figurer par un exemple simple. On sait qu'un plan peut être enroulé sans extension sur un cylindre, et les lignes droites du plan deviennent, dans cette opération, des lignes géodésiques du cylindre. Les géométries du plan et du cylindre ont donc beaucoup de points communs. Mais puisque le cercle générateur du cylindre, qui est une de ses lignes géodésiques, est fini, on n'emploie qu'une portion du plan en l'enroulant une fois autour du cylindre. Si donc on cherche à établir une correspondance point par point entre le plan et le cylindre, on trouvera une série infinie de points du plan pour un seul point du cylindre. Il arrive ainsi que des lignes géodésiques peuvent avoir sur le cylindre un nombre infini de points d'intersection, bien que sur le plan elles n'aient qu'un seul

point commun. La relation entre les géométries sphérique et elliptique est quelque chose d'analogue. A un point quelconque de l'espace elliptique correspondent deux points de l'espace sphérique. Aussi des lignes géodésiques qui, dans l'espace sphérique, peuvent avoir deux points communs, ne peuvent jamais, dans l'espace elliptique, avoir plus d'une intersection.

Mais la méthode de Klein peut seulement prouver que la Géométrie elliptique vaut pour le plan euclidien ordinaire avec la mesure elliptique de la distance. Klein a fait de grands efforts pour confirmer la distinction des géométries sphérique et elliptique (1), mais il n'est pas immédiatement évident que la dernière soit valable comme distincte de la première.

En premier lieu, la Géométrie elliptique de Klein, qui se présente comme un des systèmes de mesure possibles sur le plan euclidien ou dans l'espace euclidien, ne peut suffire par elle-même, si la discussion précédente a quelque valeur, à prouver la possibilité d'un espace elliptique, c'est-à-dire d'un espace ayant une correspondance point par point avec l'espace euclidien et ayant, pour expression de la distance ordinaire entre deux de ses points, la définition elliptique de la distance entre les points correspondants de l'espace euclidien. Pour prouver cette possibilité, il faut adopter la méthode directe de Newcomb (2). Or, en premier lieu, Newcomb n'a pas prouvé que ses postulats fussent compatibles entre eux; il a seulement échoué à prouver qu'ils fussent contradictoires (3). Cela laisserait l'espace elliptique dans la position où Lobatchevsky et Bolyaï avaient laissé l'espace hyperbolique. Bien plus, il semble, à première vue, qu'il y ait une contradiction positive dans l'idée

---

(1) Voir *Nicht-Euklid.* t. I, p. 97 et suivantes et p. 292 et suivantes.

(2) *Journal de Crelle*, t. 83.

(3) Newcomb dit (*loc. cit.* p. 293): « Le système exposé ici est fondé sur les trois postulats suivants :

» 1° Je suppose que l'espace est triplement étendu, illimité, n'a aucune propriété qui dépende de la position ou de la direction, et possède une telle « planité » (*planeness*) dans ses plus petites parties, que les postulats de la Géométrie euclidienne, et nos notions communes sur les relations des parties de l'espace, soient vrais pour toute région infiniment petite de l'espace.

» 2° Je suppose que cet espace est affecté d'une courbure telle qu'une ligne droite revient toujours sur elle-même au bout d'une distance finie et réelle

d'un espace elliptique à *deux* dimensions. Mais pour expliquer cela, il est nécessaire de rappeler quelques particularités du plan elliptique.

Le plan elliptique, considéré comme une figure dans l'espace elliptique à trois dimensions, est ce qu'on nomme une *surface unilatère* (¹), c'est-à-dire, comme dit Newcomb (²) : « Les deux

---

2D sans perdre, dans une partie quelconque de son cours, cette symétrie de tous les côtés par rapport à l'espace, qui constitue la propriété fondamentale de notre notion de droite.

» 3° Je suppose que si deux lignes droites issues du même point font entre elles l'angle infiniment petit α, leur écartement, à la distance r de leur point d'intersection, sera donné par l'équation

$$S = \frac{2\alpha D}{\pi} \sin \frac{r\pi}{2D}.$$

» La ligne droite a ainsi en commun avec la droite euclidienne cette propriété, que deux semblables droites ne se coupent qu'en un seul point. Il se peut que le nombre des points où deux semblables lignes se coupent puisse être déterminé par les lois de la courbure : mais s'il n'est pas possible de le déterminer ainsi, j'admets, à titre de postulat, la propriété fondamentale de la ligne droite euclidienne. »

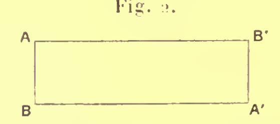
Il est clair qu'en l'absence de ladite détermination, la possibilité de l'espace elliptique n'est pas établie. Par exemple, on pourrait peut-être prouver que, dans un espace où il existe un maximum de distance, il doit exister un nombre infini de droites joignant deux points de distance maxima. Dans ce cas, l'espace elliptique deviendrait impossible.

(¹) Pour l'explication de ce terme, *voir* KLEIN, *Nicht-Euklid*, t. I, p. 99 et suiv. *(Note de l'auteur.)*

Nous traduisons *double surface* (en allemand *Doppelfläche*) par *surface unilatère*, expression employée par MM. Poincaré et Picard, pour désigner une surface qui n'a qu'une face, par opposition aux surfaces *bilatères*, comme le plan euclidien, dont les deux faces sont entièrement séparées.

L'exemple le plus simple de surface unilatère est le ruban de Möbius, représentation concrète du plan elliptique, obtenu en prenant un rectangle ABA'B' et en collant les deux bouts de manière à superposer A' à A et B'

Fig. 2.

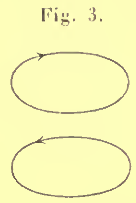


à B. Cette surface n'a qu'une face, double en ce sens qu'elle forme à la fois l'envers et l'endroit et que chaque point compte deux fois, car, en parcourant le ruban de Möbius, on passe deux fois par chaque point. *(Note du traducteur.)*

(²) *Loc. cit.*, p. 298.

faces d'un plan complet ne sont pas distinctes comme dans une surface euclidienne.... Si un voyageur doit parcourir la distance 2D, il se trouvera, au retour, sur la face opposée à celle dont il était parti, et il aura à répéter son voyage pour revenir à sa position primitive sans quitter la même surface. » Or, si nous imaginons un espace elliptique à *deux* dimensions, la distinction entre les deux faces d'un plan n'a plus de sens, puisqu'elle n'a de signification que par rapport à la troisième dimension. Néanmoins, une telle distinction devrait s'imposer à nous. Supposons, par exemple, qu'on prenne un petit cercle muni d'une flèche, comme dans la figure ci-jointe, et qu'on le

Fig. 3.



transporte une fois autour de l'univers; le sens de la flèche sera alors renversé (1). On sera donc obligé, soit de regarder la nouvelle position comme distincte de la première, ce qui transforme notre plan en plan sphérique, soit d'attribuer le renversement de la flèche à l'action d'un mouvement qui rétablisse notre cercle dans sa position primitive. Il faut remarquer qu'aucun mouvement moindre que celui qui consiste à se déplacer autour de l'univers ne suffirait à renverser le sens de la flèche. Ce renversement ressemble à une action de l'espace vide, ce qui nous forcerait à regarder comme réellement distincts les points qui, au point de vue de la troisième dimension, coïncident quoique opposés, et à ramener ainsi le plan elliptique au plan sphérique. Mais c'est le mouvement, et non l'espace, qui est la cause réelle du changement; et, par suite, il n'est pas prouvé que le plan elliptique soit impossible. La question n'est pas, en tout cas, d'une grande importance philosophique.

(1) Cette particularité de la Géométrie elliptique est discutée tout au long dans le Livre VI, Chap. II, de l'*Universal Algebra* de M. A.-N. Whitehead. Cambridge, 1898.

41. La réduction de la Géométrie métrique à la Géométrie projective nous fournit encore un sujet de discussion. C'est par l'emploi géométrique des imaginaires que cette réduction s'effectue, excepté dans le cas de l'espace hyperbolique. J'ai déjà soutenu (§ 37, note), pour d'autres raisons, que cette réduction est purement technique et n'a aucune valeur philosophique, malgré son immense importance technique, et bien que la Géométrie projective soit complètement affranchie, au point de vue logique, des idées métriques. Nous arriverons à la même conclusion en répondant à l'invitation lancée par Cayley à l'Association britannique, dans son Adresse présidentielle de 1883.

De cette adresse, le professeur Cayley a consacré la majeure partie aux systèmes non-euclidiens. Les *espaces* non-euclidiennes, déclare-t-il, lui semblent avoir été regardés à tort comme *a priori* (¹); mais il accepte les *Géométries* non-euclidiennes, ici comme dans ses œuvres mathématiques, comme découlant d'un changement dans la définition de la distance. Cette opinion a déjà été discutée et n'a donc pas besoin d'être davantage critiquée ici. Ce dont je voudrais parler, c'est de la question par laquelle Cayley lui-même a ouvert son Adresse, à savoir de l'usage et de la signification des quantités imaginaires. D'après la manière dont il en parle, il devient indispensable de la traiter avec quelque développement. Il dit en effet (p. 8 et 9) :

« ... La notion qui est réellement fondamentale (et je ne saurais insister trop fortement sur cette assertion), qui soutient et pénètre toute la conception de l'Analyse et de la Géométrie modernes, est celle de la grandeur imaginaire en Analyse et de l'espace imaginaire en Géométrie (cet espace étant conçu comme le lieu des points et des figures imaginaires) : j'emploie dans chaque cas le mot *imaginaire* comme comprenant le réel....

(¹) *Cf.* p. 9 du rapport : « Mon opinion est que le douzième axiome d'Euclide, dans la forme que lui donne Playfair, n'a pas besoin de démonstration, mais fait partie de notre notion de l'espace, de l'espace physique de notre expérience, lequel est la représentation qui gît au fond de toute expérience externe. »

Lors même que la conclusion serait que cette notion appartient aux mathématiques purement techniques, ou qu'elle se rapporte à des non-êtres à l'égard desquels aucune science n'est possible, encore me semble-t-il que cette notion ne devrait pas être ainsi ignorée comme sujet de discussion philosophique; on devrait tout au moins montrer qu'on a le droit de l'ignorer. »

42. C'est ce droit que je me propose de démontrer présentement: mais, de peur que les non-mathématiciens ne se méprennent sur le sens de la remarque de Cayley (qu'on a quelquefois crue à tort se rapporter aux espaces non-euclidiens), il vaut autant expliquer tout de suite que cette question est radicalement distincte de celle de la valeur ou de la portée de la Métagéométrie, et n'a avec elle qu'un rapport indirect. Une quantité imaginaire est une quantité qui contient $\sqrt{-1}$; sa forme la plus générale est $a+b\sqrt{-1}$, où a et b sont réels; Cayley emploie le mot *imaginaire* comme comprenant le réel, afin d'envelopper le cas spécial où $b=0$. Il sera commode, dans ce qui suit, d'exclure ce sens plus large, et de supposer que b n'est pas nul. Un point imaginaire est un point dont les coordonnées contiennent $\sqrt{-1}$, c'est-à-dire dont les coordonnées sont des quantités imaginaires. Une courbe imaginaire est une courbe dont les points sont imaginaires, ou, dans quelques cas spéciaux, dont l'équation contient des coefficients imaginaires. Nous n'avons pas besoin de discuter ici les subtilités mathématiques auxquelles cette notion donne lieu; le lecteur que le sujet intéresse trouvera un excellent exposé élémentaire des emplois géométriques des imaginaires dans Klein, *Nicht-Euklid,* t. II, p. 38 à 46. Pour notre objet présent, nous pouvons nous borner aux points imaginaires. Si nous trouvons qu'ils ont une importance purement technique et qu'ils sont dépourvus de toute signification philosophique, la même conclusion vaudra pour toute collection de points imaginaires, c'est-à-dire pour toute courbe ou surface imaginaire.

Que la notion des points imaginaires soit d'une suprême importance en Géométrie, on s'en apercevra si l'on réfléchit que les points circulaires à l'infini sont imaginaires, et que de ces points

dépend la réduction de la Géométrie métrique à la Géométrie projective, qui est une des plus grandes conquêtes de Cayley. Mais il m'est difficile de discuter complètement leur importance philosophique, car je ne connais pas de théorie philosophique satisfaisante de l'emploi des imaginaires dans l'Algèbre pure; j'adopterai par suite l'hypothèse la plus favorable, et j'admettrai que cet emploi ne prête à aucune objection sérieuse. Même dans cette hypothèse, je crois qu'on ne peut découvrir aucune place pour des points imaginaires en Géométrie.

En premier lieu, il faut exclure des points imaginaires considérés ceux dont les coordonnées ne sont imaginaires qu'avec certains systèmes spéciaux de coordonnées. Par exemple, si l'une des coordonnées d'un point est la tangente menée de ce point à une sphère, cette coordonnée sera imaginaire pour tout point pris à l'intérieur de la sphère, et pourtant le point est parfaitement réel. Un point ne doit donc être appelé *imaginaire* que lorsqu'une ou plusieurs des grandeurs qui expriment ses coordonnées restent imaginaires, quel que soit le système réel de coordonnées que l'on adopte. Pour notre objet, il suffira mathématiquement de supposer nos coordonnées cartésiennes; un point dont les coordonnées cartésiennes sont imaginaires est en effet un véritable point imaginaire dans le sens que nous venons de définir.

Pour discuter la signification d'un tel point, il est nécessaire d'étudier brièvement la nature fondamentale de la correspondance entre un point et ses coordonnées. En supposant que la Géométrie élémentaire ait prouvé (ce qu'elle fait, je crois, d'une manière satisfaisante) que les relations spatiales sont susceptibles de mesure quantitative, un point donné aura, dans un espace à n dimensions et dans un système convenable de coordonnées, n relations quantitatives avec la figure spatiale fixe qui forme les axes de coordonnées; et ces n relations quantitatives seront uniques, sous certaines réserves, c'est-à-dire qu'aucun autre point n'aura pour coordonnées les mêmes grandeurs qui sont assignées à ce point. (Dans beaucoup de systèmes possibles de coordonnées, cette dernière condition n'est pas réalisée; mais, pour cette raison, ils sont incommodes

et employés seulement dans des problèmes spéciaux.) Ainsi, étant donnés un système de coordonnées et un ensemble de grandeurs, ces grandeurs déterminent un point unique, *si toutefois elles en déterminent un*. Seulement, par une extension naturelle de la méthode, on supprime la réserve précédente, et l'on admet qu'à *tout* ensemble de grandeurs doit correspondre un point. Mais il ne me paraît pas y avoir l'ombre d'une preuve en faveur de cette supposition. Un facteur pourrait aussi bien supposer que, puisque chaque maison dans une rue est uniquement déterminée par son numéro, il doit y avoir une maison correspondant à chaque nombre imaginable. Il faut savoir, en effet, qu'un ensemble donné de grandeurs peut représenter les coordonnées de quelque point de l'espace, avant de pouvoir donner une signification spatiale à ces grandeurs, et cette connaissance ne peut évidemment pas provenir des opérations faites sur les coordonnées seules, sous peine de cercle vicieux. Il faut, pour revenir à l'exemple précédent, connaître le nombre des maisons de Piccadilly ([1]) avant de savoir si, à un numéro donné, correspond, oui ou non, une maison; et l'Arithmétique seule, aussi habilement employée qu'on voudra, ne nous en instruira jamais.

Ainsi la distinction qui importe est, non pas celle des grandeurs réelles et imaginaires, mais la distinction des grandeurs auxquelles correspondent des points et de celles auxquelles il n'en correspond aucun. On peut, par convention, s'arranger pour désigner des points réels par des coordonnées imaginaires, comme dans la méthode de Gauss, où l'on distingue par la quantité unique $a + b\sqrt{-1}$ le point dont les coordonnées ordinaires sont a et b. Mais cela n'a pas de rapport avec la méthode de Cayley. Selon Cayley, il est très utile en Mathématiques de regarder comme des points ayant une existence réelle dans l'espace les corrélatifs spatiaux hypothétiques de quantités qui, avec le système de coordonnées employé, n'ont pas de corrélatif dans l'espace ordinaire, et beaucoup de mathé-

([1]) Tout le monde sait que Piccadilly est une rue de Londres.
(*Note du traducteur.*)

maticiens croient que cette utilité révèle la validité d'une hypothèse aussi féconde. Pour fixer les idées, considérons les axes cartésiens dans l'espace euclidien à trois dimensions. On voit alors immédiatement qu'un point peut être situé à n'importe quelle distance à droite ou à gauche de l'un des trois plans coordonnés : si donc l'on prend cette distance pour coordonnée, il est clair qu'à toutes les grandeurs de $-\infty$ à $+\infty$ correspondent des points réels. Il en est de même pour les deux autres coordonnées; et puisque la Géométrie élémentaire prouve que leurs variations sont indépendantes entre elles, nous sommes sûrs qu'à tout ensemble de trois quantités réelles correspond un point réel et un seul. Mais nous savons aussi, au moyen de la méthode exhaustive employée, que tout l'espace est couvert par l'ensemble de ces trois grandeurs variables; par suite, un nouvel ensemble de grandeurs, comme en introduit l'emploi des imaginaires, ne possède aucun corrélatif spatial, et l'on ne peut admettre qu'il en possède un que par une fiction commode.

43. On pourrait néanmoins penser que le fait que cette fiction est commode indique qu'elle est plus qu'une fiction. Mais cette présomption peut, je crois, être aisément écartée. En effet, tous les emplois fructueux des imaginaires, en Géométrie, sont ceux qui commencent et finissent par des grandeurs réelles et ne font usage des imaginaires que pour les étapes intermédiaires. Or, dans tous ces cas, on a une interprétation spatiale réelle au commencement et à la fin des raisonnements, c'est-à-dire là seulement où l'interprétation spatiale importe : dans les chaînons intermédiaires, on traite d'une manière purement algébrique des grandeurs purement algébriques, et l'on peut effectuer toutes les opérations qui sont algébriquement permises. Si les grandeurs auxquelles on aboutit sont susceptibles d'interprétation spatiale, alors, et alors seulement, le résultat peut être regardé comme géométrique. Dans tout autre cas, l'emploi du langage géométrique n'est qu'un auxiliaire commode pour l'imagination. Parler, par exemple, des propriétés projectives qui se rapportent aux points circu-

laires à l'infini, c'est un simple moyen mnémotechnique de se rappeler des propriétés purement algébriques; les points circulaires à l'infini ne se trouvent pas dans l'espace, mais seulement dans les grandeurs auxiliaires au moyen desquelles on transforme les équations géométriques. Il n'est pas étonnant qu'aucune contradiction ne résulte de l'interprétation géométrique des imaginaires; car on ne les interprète que suivant les règles de l'Algèbre, que nous pouvons admettre comme valables dans leur application aux imaginaires. La perception de l'espace étant totalement absente, l'Algèbre règne souverainement, et aucune inconséquence ne peut se produire. Mais dès qu'on laisse pénétrer, pour un moment, nos idées spatiales ordinaires, les plus grossières absurdités apparaissent : chacun peut voir qu'un cercle, étant une courbe fermée, ne peut aller à l'infini. Le métaphysicien qui inventerait quelque chose d'aussi absurde que les points circulaires à l'infini, serait chassé honteusement de l'arène. Mais les mathématiciens peuvent tout se permettre impunément.

En définitive, c'est seulement la connaissance de l'espace, et non celle de l'Algèbre, qui peut nous assurer que tout ensemble de grandeurs donné a un corrélatif spatial, et, en l'absence d'un tel corrélatif, les opérations sur ces grandeurs n'ont aucune portée géométrique. C'est le cas des imaginaires au sens de Cayley, et leur emploi en Géométrie, si grands que soient ses avantages techniques et si rigoureuse que soit sa valeur technique, est complètement dépourvu de signification philosophique.

44. Nous avons maintenant, je crois, discuté la plupart des questions qui concernent la portée et la valeur de la méthode projective. Nous avons vu qu'elle est indépendante de toute présupposition métrique, et que l'usage qu'elle fait des coordonnées ne suppose nullement qu'elles mesurent ou expriment des quantités spatiales. Nous avons vu qu'elle est à même de traiter, par ses seules méthodes, la question de la similitude qualitative des figures géométriques, laquelle est antérieure à toute comparaison de grandeur, puisque la grandeur présup-

pose la similitude qualitative. Nous avons vu, en outre, que, aussi loin que son usage légitime s'étend, elle s'applique également à tous les espaces homogènes, et que son criterium d'un espace possible par lui-même [à savoir la détermination d'une ligne droite par deux points (¹)] n'est pas sujet aux spécifications et limitations que subit, comme nous l'avons vu dans le cas du cylindre, le criterium métrique tiré de la courbure constante. Mais nous avons vu aussi que, lorsque la Géométrie projective essaie d'appréhender la grandeur spatiale, et de soumettre à ses lois la distance et la mesure des angles, ses résultats, bien que valables et importants au point de vue technique, ne constituent qu'un succès apparent au point de vue philosophique. La Géométrie métrique, si tant est que la grandeur puisse être appliquée à l'espace, reste donc une branche séparée des Mathématiques, quoique logiquement postérieure à la Géométrie projective.

45. Il ne reste plus qu'à dire quelques mots de Sophus Lie. Comme mathématicien, comme inventeur d'une nouvelle méthode d'analyse d'un pouvoir immense, on ne saurait le louer trop hautement. La Géométrie n'est qu'un des nombreux sujets auxquels s'applique sa théorie des groupes continus, mais cette application a produit une révolution dans la méthode, et a permis de traiter des problèmes, comme celui de Helmholtz, d'une manière infiniment plus précise et plus complète qu'il n'était possible auparavant.

La définition générale d'un groupe est la suivante : Si l'on a un nombre quelconque de variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et une série de transformations de celles-ci en de nouvelles variables (les transformations étant définies par des équations de formes connues, avec des paramètres variant d'une transformation à l'autre), cette série de transformations forme un *groupe*, si l'application successive de deux quelconques d'entre elles équivaut à une seule transformation de la série primitive.

(¹) L'exception que cet axiome subit dans l'espace sphérique présuppose la Géométrie métrique, et ne détruit pas la validité de l'axiome pour la Géométrie projective. *Voir* Chap. III, Sect. B, § 171.

Le groupe est dit *continu*, lorsqu'on peut passer d'une transformation à une autre par des gradations infinitésimales contenues dans le groupe.

Or, en Géométrie, le résultat de deux mouvements successifs ou de deux collinéations successives d'une figure peut toujours être obtenu par un seul mouvement ou par une seule collinéation, et tout mouvement ou toute collinéation peut être construit au moyen d'une série de mouvements infinitésimaux ou de collinéations infinitésimales. De plus, l'expression analytique de l'un ou de l'autre est une certaine transformation des coordonnées de tous les points de la figure ([1]). Par suite, les transformations qui déterminent un mouvement ou une collinéation sont de celles qui forment un groupe continu. Or la question de l'équivalence projective de deux figures, à laquelle peut se réduire toute la Géométrie projective, doit toujours être résolue par une collinéation; et la question de l'égalité de deux figures, à laquelle peut se réduire toute la Géométrie métrique, doit toujours être résolue par un mouvement capable de produire une superposition; par conséquent, toute la Géométrie peut être regardée comme une théorie des groupes continus qui définissent toutes les collinéations et tous les mouvements possibles.

Sophus Lie a développé, tout au long, la théorie purement analytique des groupes; aussi cette manière de formuler le problème lui a-t-elle fourni une arme très puissante pour attaquer la question. Dans deux articles *Sur les fondements de la Géométrie* ([2]), entrepris à la requête pressante de Klein, il

---

([1]) Les mathématiciens de l'école de Lie ont l'habitude, qui produit au premier abord quelque confusion, de parler des mouvements de l'espace au lieu des mouvements des corps, comme si l'espace pouvait se mouvoir en entier. Cela ne signifie naturellement pas autre chose que le mouvement équivalent des axes coordonnés, c'est-à-dire un changement d'axes dans le sens élémentaire usuel.

([2]) *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (*Leipziger Berichte*, 1890). Le problème qui forme le sujet de ces deux articles est réellement métrique, car il porte, non sur des collinéations en général, mais sur des mouvements. Cette question est néanmoins traitée par la méthode projective, car les mouvements sont regardés comme des collinéations qui laissent invariable l'Absolu. Il semble impossible par suite de discuter le travail de Lie, tant qu'on n'aura pas donné quelque notion de la méthode projective.

pose des prémisses qui correspondent à peu près à celles de Helmholtz, moins la Monodromie, et il emploie la théorie des groupes à en déduire les conséquences (¹). On ne peut guère, dit-il, regarder le travail de Helmholtz comme *démontrant* ses conclusions, et, en effet, l'analyse plus pénétrante fondée sur la théorie des groupes révèle plusieurs possibilités inconnues de Helmholtz. Néanmoins, en sa qualité de pionnier, dépourvu des instruments de Lie, Helmholtz mérite, je crois, plus de louanges que Lie ne veut bien lui en accorder (²).

La méthode de Lie épuise parfaitement le sujet; si l'on supprime la prémisse de la Monodromie, les autres montrent qu'un corps a six degrés de liberté, c'est-à-dire que le groupe qui donne tous les déplacements possibles d'un corps aurait six membres indépendants; si l'on rend un point fixe, le nombre des membres indépendants se réduit à trois. Au moyen de sa théorie générale, il énumère alors tous les groupes qui satisfont à cette condition. Pour qu'un tel groupe fournisse des mouvements possibles, il faut, en vertu du second axiome de Helm-

---

(¹) Voici exactement quelles sont les prémisses de Lie :
Soit

$$x_1 = f(x, y, z, a_1, a_2, \ldots),$$
$$x_2 = \varphi(x, y, z, a_1, a_2, \ldots),$$
$$x_3 = \psi(x, y, z, a_1, a_2, \ldots),$$

une famille infinie donnée de transformations réelles de l'espace, sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

A. Les fonctions f, φ, ψ sont des fonctions analytiques de

$$x, \quad y, \quad z, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots.$$

B. Deux points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) possèdent un invariant, c'est-à-dire que

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \Omega(x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2),$$

où $x'_1, \ldots, x'_2, \ldots$ sont les coordonnées transformées des deux points.

C. *Libre mobilité*, c'est-à-dire : un point quelconque peut être transporté dans une autre position quelconque; quand on fixe un point, tout autre point de position générale peut prendre ∞^2 positions; quand on fixe deux points, tout autre point de position générale peut prendre ∞^1 positions; quand on fixe trois points, aucun mouvement n'est possible : ces limitations du mouvement résultant des équations fournies par l'invariant Ω.

(²) Sur ce sujet, *cf.* KLEIN, *Höhere Geometrie* (Göttingen, 1893), t. II, p. 225 à 244, spécialement p. 230-231.

holtz, qu'il laisse invariante une certaine fonction des coordonnées de deux points quelconques. Cela élimine plusieurs des groupes précédemment énumérés; en les discutant l'un après l'autre, il arrive aux résultats suivants :

I. *Dans la Géométrie à deux dimensions,* si la libre mobilité a lieu *dans tout l'espace,* il n'y a pas de groupe qui satisfasse aux trois premiers axiomes de Helmholtz, excepté ceux qui donnent les mouvements euclidiens et non-euclidiens ordinaires; mais si elle a seulement lieu *à l'intérieur d'une certaine région,* il y a encore un groupe possible où la courbe décrite par un point quelconque en rotation n'est pas fermée, mais forme une spirale logarithmique. L'axiome de la Monodromie de Helmholtz est nécessaire pour exclure cette possibilité.

II. *Dans la Géométrie à trois dimensions,* les résultats sont encore plus contraires à ceux de Helmholtz. Si l'on n'admet la libre mobilité que *dans une certaine région,* on a à distinguer deux cas : 1° ou bien la libre mobilité a lieu, dans cette région, absolument sans exception, c'est-à-dire que, si un point reste fixe, *tout* autre point de la région peut se mouvoir librement sur une surface : dans ce cas, l'axiome de la Monodromie n'est pas nécessaire, et les trois premiers axiomes suffisent à définir le groupe, qui est celui des mouvements euclidiens et non-euclidiens; 2° ou bien la libre mobilité, dans la région spécifiée, a lieu seulement pour chaque point *de position générale,* tandis que, si l'on fixe un point, les points d'une certaine ligne ne peuvent se mouvoir que sur cette ligne, et non sur une surface : dans ce cas, d'autres groupes sont possibles, et ne peuvent être exclus que par le quatrième axiome de Helmholtz.

Maintenant que nous avons exposé les résultats purement mathématiques des recherches de Lie, nous pouvons revenir aux considérations philosophiques qui avaient principalement inspiré le travail de Helmholtz. Il est évident que non seulement les restrictions imposées à la libre mobilité dans une cer-

taine région, mais encore sa limitation à une certaine région, sont absolument impossibles et inconcevables au point de vue philosophique. Comment une certaine ligne ou une certaine surface pourrait-elle former une barrière infranchissable dans l'espace, ou posséder une mobilité d'une espèce différente de celle des autres lignes ou surfaces? Cette notion ne peut pas être admise un seul instant en philosophie, car elle détruit le plus fondamental de tous les axiomes : l'homogénéité de l'espace. Ainsi, non seulement nous pouvons, mais encore nous devons prendre l'axiome de Libre Mobilité de Helmholtz dans son sens le plus strict; alors l'axiome de la Monodromie devient superflu, mathématiquement aussi bien que philosophiquement. Tel est, au point de vue philosophique, le plus important des résultats de Lie.

46. Nous sommes arrivé à la fin de notre histoire de la Métagéométrie. Mon dessein n'était pas de donner un exposé complet même des travaux importants publiés sur ce sujet : dans la troisième période, en particulier, les noms de Poincaré, Pasch, Cremona, Veronese et d'autres qui pourraient être mentionnés, auraient eu le droit de protester, si telle avait été mon intention. J'ai seulement essayé d'exposer, aussi clairement que j'ai pu, les principes mis en œuvre dans les diverses périodes, les idées directrices et les résultats des théories successives. Nous avons vu comment le motif philosophique, d'abord prédominant, a été graduellement expulsé par l'esprit purement mathématique et technique des géomètres les plus récents. Au début, les métagéomètres attachaient autant d'importance à réfuter l'Esthétique transcendantale qu'à faire avancer leur science; tandis qu'aucun lecteur de Cayley, de Klein ou de Lie ne se douterait que Kant ait jamais existé. Mais nous avons vu aussi que, si l'intérêt *en* philosophie diminuait, l'intérêt *pour* la philosophie augmentait : à mesure que les résultats mathématiques se développaient indépendamment des controverses philosophiques, ils prenaient graduellement une forme stable, dont le développement ultérieur, on peut raisonnablement l'espérer, consistera plutôt à les étendre qu'à

les transformer. La plupart des branches des Mathématiques ont suivi, je crois, dans leur enfance, le même développement graduel, en se dégageant de la philosophie; quand les motifs philosophiques ont cessé d'influer sur elles, c'est signe, en général, qu'elles ont dépassé le stade où leurs prémisses sont encore incertaines, de sorte que l'avenir appartient entièrement à la technique mathématique. Lorsque cette période de stabilité est atteinte, il est temps pour la Philosophie de faire des emprunts à la Science, en acceptant ses prémisses définitives comme celles qu'impose la nécessité réelle de la logique ou des faits.

47. En discutant les systèmes des métagéomètres, nous avons trouvé deux espèces de Géométrie radicalement distinctes et soumises à des axiomes différents. L'espèce historiquement antérieure, qui traite d'idées métriques, discute, pour commencer, les conditions de la libre mobilité, qui est essentielle à toute mesure de l'espace. Elle trouve l'expression analytique de ces conditions dans l'existence d'une constante spatiale ou d'une courbure constante, ce qui équivaut à l'homogénéité de l'espace. C'est là son premier axiome.

Son second axiome affirme que l'espace a un nombre entier fini de dimensions, c'est-à-dire, en termes métriques, que la position d'un point, par rapport à n'importe quelle autre figure de l'espace, est déterminée d'une manière unique par un nombre fini de grandeurs spatiales, appelées *coordonnées*.

Le troisième axiome de la Géométrie métrique peut être appelé *axiome de la distance*, pour le distinguer de l'axiome projectif correspondant. Cet axiome dit qu'il existe entre deux points quelconques une relation qui peut être conservée invariable dans un mouvement combiné des deux points, et qui reste toujours invariable dans tout mouvement d'un système tel qu'un corps rigide. C'est cette relation qu'on nomme *distance*.

Cet énoncé des trois axiomes essentiels de la Géométrie métrique est emprunté à Helmholtz, mais rectifié par Lie. L'énoncé des axiomes par Lie, tel que nous l'avons cité, a été

trop influencé par les méthodes projectives pour donner une expression historiquement correcte de l'esprit de la seconde période; celui de Helmholtz, d'autre part, appelle, comme l'a montré Lie, des modifications très considérables. J'espère avoir trouvé entre les deux un compromis acceptable en adoptant les corrections de Lie tout en conservant l'esprit de Helmholtz.

48. Mais la Géométrie métrique, quoique historiquement antérieure, est logiquement postérieure à la Géométrie projective; car la Géométrie projective traite directement de la similitude qualitative, qui est la base indispensable du jugement de comparaison quantitative. Or les trois axiomes précédents de la Géométrie métrique ne présupposent pas la mesure, ils formulent, au contraire, les conditions présupposées par la mesure, comme nous le verrons dans le Chapitre III, section B. Sans ces axiomes, qui sont communs aux trois espaces, la mesure serait impossible; avec eux, ainsi que j'essaierai de le prouver, la mesure est capable, quoique seulement d'une manière empirique, de décider approximativement lequel des trois espaces est valable pour notre monde actuel. Mais si ces trois axiomes eux-mêmes expriment, non les résultats, mais les conditions de la mesure, ne doivent-ils pas être équivalents à l'affirmation de cette similitude qualitative dont dépend la comparaison quantitative? Et s'il en est ainsi, ne faut-il pas s'attendre à trouver les mêmes axiomes en Géométrie projective, quoique peut-être sous une forme différente?

49. Cette attente ne sera pas déçue. Les trois axiomes précédents, comme nous le verrons plus tard, sont tous ensemble philosophiquement équivalents à l'homogénéité de l'espace, qui à son tour équivaut aux axiomes de la Géométrie projective. En fait, ceux-ci peuvent être énoncés en gros comme suit :

1. L'espace est continu et divisible à l'infini; le zéro d'étendue, résultant d'une division infinie, est appelé *point*. Tous les points sont qualitativement semblables, et se distinguent entre eux par le seul fait qu'ils sont extérieurs les uns aux autres.

II. Deux points quelconques déterminent une figure unique, la ligne droite; deux lignes droites, comme deux points, sont qualitativement semblables, et se distinguent entre elles par le seul fait qu'elles sont extérieures l'une à l'autre.

III. Trois points non en ligne droite déterminent une figure unique, le plan, et quatre points non situés dans un même plan déterminent une figure à trois dimensions. Cette progression peut, autant qu'on peut en juger *a priori*, se prolonger jusqu'à cinq ou n points, sans exclure en aucune manière la possibilité d'une Géométrie projective. Mais la Géométrie projective exige, à titre d'axiome, que cette progression s'arrête à un nombre de points entier et positif, après quoi tout point nouveau doit être contenu dans la figure déterminée par ceux qui sont déjà donnés. Si cette progression s'arrête à $(n+1)$ points, on dit que l'espace a n dimensions.

On verra que ces trois axiomes sont les équivalents des trois axiomes de la Géométrie métrique ([1]), exprimés sans aucune référence à la grandeur. Nous trouverons qu'ils peuvent se déduire, comme ci-devant, de l'homogénéité de l'espace, ou, plus généralement encore, de la possibilité d'une expérience externe. Ils apparaîtront par suite comme *a priori*, en tant qu'ils sont essentiels à l'existence de toute Géométrie et à l'expérience d'un monde extérieur comme tel.

50. Que ces axiomes possèdent une certaine nécessité logique, c'est ce qui peut, je crois, être inféré comme probable de la seule inspection de leur développement historique. En effet, les systèmes des métagéomètres n'ont pas été proposés, en général, comme plus capables de s'accommoder aux faits que le système d'Euclide; à l'exception de Zöllner, par exemple, et de quelques visionnaires, je n'en connais pas un qui ait considéré la quatrième dimension comme requise pour expliquer certains

([1]) L'axiome II de la Géométrie métrique correspond à l'axiome III de la Géométrie projective, et *vice versa*.

phénomènes. Pour ce qui est de la constante spatiale, bien qu'une *petite* constante spatiale soit regardée comme empiriquement possible, on ne la regarde généralement pas comme probable; et les constantes spatiales de grandeur finie, dont la Métagéométrie s'occupe également, ne sont même pas habituellement regardées comme possibles à titre d'explication d'un fait empirique ([1]). Ainsi le motif déterminant n'était pas du tout une raison de fait, mais une raison de logique. Cela ne donne-t-il pas fortement à présumer que, si l'on conservait ces axiomes, c'est parce qu'ils sont logiquement indispensables? S'il en est ainsi, les axiomes communs aux géométries euclidienne et non-euclidiennes doivent être *a priori*, tandis que les axiomes particuliers à Euclide seront empiriques. Après un examen critique de quelques théories différentes de la Géométrie, je développerai dans les Chapitres III et IV la démonstration et les conséquences de cette thèse, qui constitueront le reste du présent Ouvrage.

([1]) *Cf.* Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. II, p. 640, note : « Les auteurs de la Géométrie non-euclidienne n'en (ont) jamais affirmé la vérité objective. »

CHAPITRE II.

EXPOSÉ CRITIQUE DE QUELQUES THÉORIES PHILOSOPHIQUES ANTÉRIEURES DE LA GÉOMÉTRIE.

51. Nous avons maintenant esquissé le développement mathématique de la théorie des axiomes géométriques, depuis la première révolte contre Euclide jusqu'à ce jour. Nous pouvons donc espérer être en possession des connaissances techniques nécessaires pour l'étude philosophique du sujet. Il est difficile d'exagérer l'influence de la Géométrie sur les théories de la connaissance qui se sont produites dans le passé. Chez Descartes, nous trouvons toute sa théorie de la méthode dominée par la Géométrie analytique, dont la fécondité lui inspirait un légitime orgueil. Chez Spinoza, l'influence prépondérante de la Géométrie est trop manifeste pour avoir besoin de commentaire. Parmi les mathématiciens, la croyance de Newton à l'espace absolu fut longtemps souveraine, et est encore responsable de la formule courante des lois du mouvement. C'est contre cette croyance, d'une part, et contre la théorie leibnitzienne de l'espace, d'autre part [et non, comme Caird l'a montré [1], contre l'empirisme de Hume], que fut dirigée la doctrine kantienne de l'espace, qui est l'arme la plus puissante de la Philosophie critique. Ainsi la Géométrie a constamment exercé une influence suprême sur la théorie de la connaissance.

Toutefois, dans une revue critique des principales théories modernes de la Géométrie, qui est destinée, non pas à faire l'histoire du sujet, mais à introduire et à défendre les opinions de l'auteur, il ne sera nécessaire de discuter aucune des théories antérieures à celle de Kant. Vraies ou fausses, les opinions de Kant sur ce sujet ont tellement dominé la marche

---

[1] *The critical Philosophy of Kant*, t. I, p. 287.

subséquente des idées, qu'elles semblent avoir contribué avec une égale puissance à former les opinions et à régler le mode d'exposition de presque tous les auteurs plus récents, soit qu'ils les acceptassent, soit qu'ils les rejetassent.

KANT.

52. Je ne me propose pas, dans ce Chapitre, d'ajouter à la volumineuse littérature de la critique kantienne, mais seulement de discuter la répercussion de la Métagéométrie sur les arguments de l'Esthétique transcendantale, et la manière dont on doit considérer ces arguments dans une discussion de la Géométrie [1]. Sur ce point, plusieurs malentendus me semblent avoir trop souvent prévalu, à la fois parmi les partisans et les adversaires de Kant, et je vais essayer de les dissiper, si je puis.

En premier lieu, que signifie la doctrine de Kant touchant la Géométrie? Ce n'est évidemment pas la face de la doctrine qui a été attaquée par les psychologues, la *machinerie kantienne* [2], comme James l'appelle, si du moins cette face peut se distinguer nettement de la face logique. Nous pouvons négliger pour le moment la question de savoir si l'espace est donné dans la sensation, ou s'il est donné, comme le soutient Kant, dans une intuition à laquelle ne correspond aucune matière extérieure. Sans doute, si nous professons cette opinion, qui semble résumer un peu crûment le point de vue de la Critique, que toute connaissance certaine est connaissance de soi-même, alors, si nous posons en principe que la Géométrie est apodictique, nous serons obligés d'admettre que l'espace est subjectif. Mais même alors, la question psychologique ne pourrait se poser que lorsque la question épistémologique aurait été résolue, et ne pourrait, par suite, être prise en considération dans nos premières recherches. La question qui se pose est précisément de

---

[1] Pour une critique de Kant à un point de vue moins purement mathématique, *voir* le Chapitre IV.

[2] *The Kantian machineshop.*

savoir si la Géométrie est apodictique, ou jusqu'à quel point elle l'est, et, pour le moment, nous n'avons qu'à élucider cette question, sans nous inquiéter des conséquences psychologiques.

53. Sur cette question, comme sur presque toutes les questions de l'Esthétique ou de l'Analytique, l'argumentation de Kant est double. D'un côté, il dit que la Géométrie est reconnue avoir une certitude apodictique : par suite, l'espace doit être *a priori* et subjectif. D'un autre côté, il déduit, de principes indépendants de la Géométrie, que l'espace est subjectif et *a priori* : par conséquent, la Géométrie doit avoir une certitude apodictique. Ces deux arguments ne sont pas nettement distingués dans l'Esthétique, mais une courte analyse suffit, je crois, à les démêler. Ainsi, dans la première édition de la *Critique de la Raison pure,* les deux premiers arguments déduisent l'apriorité de l'espace de principes non géométriques; le troisième déduit la certitude apodictique de la Géométrie, et soutient, réciproquement, qu'aucune autre théorie ne peut rendre compte de cette certitude (¹); les deux derniers arguments établissent seulement que l'espace est une intuition, et non un concept. Dans la seconde édition, le double raisonnement est plus clair, l'apriorité de l'espace étant prouvée, dans la déduction métaphysique, indépendamment de la Géométrie, et, dans la déduction transcendantale, dérivée de la certitude de la Géométrie, comme la seule explication possible de celle-ci. Dans les *Prolégomènes,* le dernier argument seul est employé, mais, dans la *Critique*, les deux le sont à la fois.

54. Or il faut admettre à présent, je crois, que la Métagéométrie a ruiné la légitimité de l'argument qui conclut de la Géométrie à l'espace; nous ne pouvons plus désormais affirmer, pour des raisons purement géométriques, la certitude apodictique de la Géométrie euclidienne. Mais, à moins que la Méta-

---

(¹) *Cf.* Le *Commentaire* de VAIHINGER, t. II, p. 202 et 265. *Voir* aussi p. 336 et suivantes.

géométrie n'ait fait plus que cela, à moins qu'elle n'ait prouvé (ce que, je crois, elle ne suffit pas à prouver à elle seule), qu'Euclide *n'a pas* de certitude apodictique, l'autre argumentation de Kant conserve autant de force qu'elle en a jamais pu avoir. L'espace actuel que nous connaissons, peut-on dire, est reconnu être euclidien, et il est prouvé, sans aucune référence à la Géométrie, qu'il est *a priori; donc* Euclide a une certitude apodictique, et la Géométrie non-euclidienne se trouve condamnée. A cela, on ne peut pas répondre, comme les métagéomètres, que les systèmes non-euclidiens sont *logiquement* consistants; car Kant a soin de faire ressortir que le raisonnement géométrique est synthétique, en vertu de notre intuition de l'espace, et ne peut, quoique *a priori,* reposer sur le seul principe de contradiction ([1]). Tant que les non-euclidiens n'auront pas prouvé, ce qu'ils n'ont certainement pas réussi à prouver jusqu'à ce jour, que nous pouvons construire une *intuition* des espaces non-euclidiens, la thèse de Kant ne peut pas être renversée par la Métagéométrie seule, et si l'on veut l'attaquer avec succès, il faut le faire par son côté purement philosophique.

55. Pour une telle attaque, deux voies sont ouvertes : ou bien on peut réfuter les deux premiers arguments de l'Esthétique, ou bien on peut critiquer, du point de vue de la logique générale, la doctrine kantienne des jugements synthétiques *a priori* et leur connexion avec la subjectivité. Ces deux attaques, je crois, peuvent être conduites avec quelque succès; mais si l'on veut ruiner la certitude apodictique de la Géométrie, l'une ou l'autre est essentielle, et les deux, je crois, n'auront qu'un succès partiel. En discutant ces deux ordres d'arguments, j'essaierai de prouver : 1° que la distinction des juge-

---

([1]) Par exemple, 2e édition, p. 39 : « Ainsi tous les théorèmes géométriques, par exemple celui-ci, que, dans un triangle, deux côtés pris ensemble sont plus grands que le troisième, ne peuvent jamais être déduits des concepts généraux de ligne et de triangle, mais de l'intuition, et cela *a priori* avec une certitude apodictique. »

ments synthétiques et analytiques est insoutenable, et en outre, que le principe de contradiction ne peut donner des résultats fructueux que si l'on suppose que l'expérience en général, ou, dans une science particulière, quelque branche spéciale de l'expérience doit être formellement possible; 2° que les deux premiers arguments de l'Esthétique transcendantale suffisent à prouver que l'expérience d'un monde extérieur a pour condition nécessaire, non l'espace euclidien, mais *quelque* forme d'extériorité, laquelle peut être une sensation ou une intuition, mais non un pur concept. Dans les troisième et quatrième Chapitres, je soutiendrai, comme résultat de ces conclusions, que les axiomes communs à Euclide et à la Métagéométrie coïncident avec les propriétés d'une forme quelconque d'extériorité qui peuvent se déduire, par le principe de contradiction, de la possibilité de l'expérience d'un monde extérieur. On peut dire alors que ces propriétés sont des propriétés *a priori* de l'espace, quoique pas tout à fait dans le sens kantien, et à leur égard, on peut maintenir, je crois, la thèse kantienne modifiée. Mais la question de la nature subjective ou objective de l'espace peut être laissée complètement de côté dans le cours de cette discussion, et celle-ci gagnera à être traitée exclusivement au point de vue logique, par opposition au point de vue psychologique.

56 (1). **Position logique de Kant.** — La doctrine des jugements synthétiques et analytiques (en tant du moins qu'on la prend pour la pierre angulaire de l'Épistémologie) a été rejetée si complètement par la plupart des logiciens modernes [1], qu'elle ne nous demanderait ici que peu d'attention, si un kantien français enthousiaste, M. Renouvier, ne l'avait récemment invoquée, avec une parfaite confiance, précisément dans cette question de la Géométrie [2]. Et il faut reconnaître, avec

---

[1] *Cf.* Bradley, *Logic*, Liv. III, Partie I, Chap. VI; Bosanquet, *Logic*, Liv. I, Chap. I, p. 97 à 103.

[2] *Philosophie de la Règle et du Compas*, ap. *Année philosophique*, t. II, p. 1 à 66.

M. Renouvier, que si de tels jugements existaient, au sens kantien, la Géométrie non-euclidienne, qui ne fait aucun appel à l'intuition, n'aurait rien à dire contre eux. La discussion de M. Renouvier nous oblige donc à passer brièvement en revue les arguments dirigés contre la doctrine de Kant, et à discuter brièvement le canon logique qui doit la remplacer.

Tout jugement (à ce que prétend la logique moderne) est à la fois synthétique et analytique; il combine des parties en un tout, et analyse un tout en ses parties ([1]). S'il en est ainsi, la distinction entre l'analyse et la synthèse, quelle que soit son importance en Logique pure, ne peut avoir aucune valeur en Épistémologie. Mais une telle doctrine, il faut le remarquer, confère une portée universelle au principe de contradiction : ce criterium est applicable également à tous les jugements, puisque tous les jugements sont analytiques, au moins par un côté. D'autre part, le tout qui est analysé doit être supposé déjà donné, avant que les parties puissent être mutuellement contradictoires; car ce n'est que par leur union en un tout donné que deux parties ou deux attributs peuvent être incompatibles. Ainsi le principe de contradiction reste stérile tant qu'on n'a pas quelques jugements, et même quelque inférence : car les parties peuvent être regardées, jusqu'à un certain point, comme une conséquence du tout, ou *vice versa*. Une fois que l'édifice de la connaissance est construit, les parties se supportent les unes les autres, et le principe de contradiction forme la clef de voûte; mais, tant que la voûte n'est pas construite, la clef reste suspendue dans le vide, sans être supportée et sans rien supporter. En d'autres termes, la connaissance peut être analysée une fois qu'elle existe; mais la connaissance qui aurait à conquérir chaque pouce de terrain sur un scepticisme critique, ne pourrait jamais commencer, ni atteindre cette structure circulaire qui seule la soutient.

Or la doctrine de Kant, si elle est vraie, a pour but de

([1]) J'ai énoncé dogmatiquement cette doctrine, car une démonstration demanderait un traité complet de Logique; j'adopte les preuves fournies par Bradley et Bosanquet, auxquelles je renvoie le lecteur.

réprimer le scepticisme critique, même là où il pourrait être effectif. Certaines propositions fondamentales, dit-il, ne peuvent se déduire par la logique, c'est-à-dire que leurs contradictoires ne sont pas en elles-mêmes des contradictions; elles unissent un sujet et un prédicat dont on ne peut montrer, par une voie purement logique, qu'ils ont quelque connexion, et pourtant ces jugements ont une certitude apodictique. Mais, en ce qui concerne de tels jugements, Kant se garde, en général, de compter sur la conviction purement subjective qu'ils sont indéniables : il prouve, avec grand soin, que, sans eux, l'expérience serait impossible. L'expérience consiste dans la combinaison de termes que la logique formelle laisse séparés, et elle présuppose, par suite, certains jugements qui constituent un échafaudage pour rassembler ces termes. Sans ces jugements, affirme Kant, toute synthèse et toute expérience seraient impossibles. Si donc le détail du raisonnement kantien est valide, ses conclusions peuvent être obtenues par le principe de contradiction *plus* la possibilité de l'expérience, aussi bien que par sa distinction entre des jugements synthétiques et analytiques.

Aujourd'hui, la logique s'attribue un domaine à la fois plus vaste et plus étroit que celui que Kant lui accordait : plus vaste, parce qu'elle se croit capable de condamner tout faux principe ou postulat; plus étroit, parce qu'elle croit que son principe de contradiction est impuissant, sans un tout donné ou une hypothèse donnée, et que deux termes, si différents qu'ils puissent être, ne peuvent pas être contradictoires par eux-mêmes, mais n'acquièrent cette relation que par leur combinaison en un tout dont on connaît quelque chose, ou par leur connexion avec un postulat qui doit être admis pour quelque raison. Ainsi, un jugement n'est pas, par lui-même, analytique ou synthétique, car, en séparant un jugement de son contexte, on lui enlève sa vitalité, et ce n'est plus vraiment un jugement. Mais, dans son contexte approprié, il n'est ni purement synthétique, ni purement analytique : d'une part, il est une détermination nouvelle d'un tout donné, et par là il est analytique; mais, d'autre part, il implique aussi l'apparition

de relations *nouvelles* au sein de ce tout, et par là il est synthétique.

57. Nous pouvons cependant retenir une distinction qui correspond à peu près à la distinction kantienne de l'*a priori* et de l'*a posteriori*, quoiqu'elle soit moins rigide et plus sujette à changer avec le degré d'organisation de la connaissance. Kant essayait habituellement de prouver, comme on l'a fait observer ci-dessus, que ses propositions synthétiques *a priori* sont des conditions nécessaires de l'expérience; or, quoique nous ne puissions pas conserver le terme *synthétique*, nous pouvons conserver le terme *a priori*, pour ces suppositions ou postulats, qui seuls fondent la possibilité de l'expérience. Tout ce qui peut être déduit de ces postulats, sans l'aide de la matière de l'expérience, sera aussi, naturellement, *a priori*. Au point de vue de la logique générale, les lois de la pensée et les catégories, avec les conditions indispensables de leur applicabilité, seront seules *a priori*; mais, au point de vue d'une science spéciale, nous pouvons appeler *a priori* tout ce qui rend possible l'expérience qui forme l'objet de cette science. En Géométrie, en particulier, nous pouvons appeler *a priori* tout ce qui rend possible l'expérience d'une extériorité comme telle.

Il faut observer que cet emploi du terme *a priori* est à la fois plus rationaliste et moins précis que celui de Kant. Kant semble s'être cru capable de reconnaître immédiatement, à la simple inspection, que telle ou telle connaissance est apodictique, et que, par suite, son objet est *a priori*, et il n'a pas toujours déduit son apriorité de quelque autre principe. Ici, au contraire, avant d'admettre l'apriorité d'un jugement, il faut montrer qu'il ne serait pas rendu faux par un simple changement dans la *matière* de l'expérience, mais seulement par un changement qui rendrait formellement impossible une branche de l'expérience. Le sens défini ci-dessus est aussi moins précis, car il varie suivant la spécialisation de l'expérience que nous supposons possible; comme chaque progrès de la connaissance découvre de nouvelles connexions, deux jugements précédemment isolés peuvent entrer en relation logique, et le domaine

de l'*a priori* peut ainsi, à tout moment, s'agrandir, à mesure qu'on trouve plus de choses à déduire des postulats fondamentaux.

58 (2). **Arguments de Kant pour l'apriorité de l'espace.** — Maintenant que nous avons discuté le canon logique qui doit être employé à l'égard de l'*a priori,* nous pouvons mettre à l'épreuve les arguments de Kant au sujet de l'espace. L'argument tiré de la Géométrie, comme on l'a remarqué plus haut, est ruiné par la Métagéométrie, au moins en tant qu'il concerne les propriétés qui appartiennent à l'espace euclidien, mais non aux espaces non-euclidiens; quant aux propriétés communes aux deux sortes d'espace, nous ne pouvons pas décider de leur apriorité tant que nous n'aurons pas examiné les conséquences de la négation de ces propriétés, ce qui sera fait dans le Chapitre III. Pour les deux arguments qui prouvent que l'espace est une intuition, et non un concept, ils appelleraient beaucoup de discussion dans une critique spéciale de Kant, mais ici nous pouvons passer outre, en faisant cette remarque évidente, que l'espace euclidien, homogène et infini, est un concept et non une intuition : un concept inventé pour expliquer une intuition, il est vrai, mais enfin un pur concept [1]. Et c'est ce pur concept qui est l'objet primordial de toutes les discussions de la Géométrie; on n'a besoin de se référer à l'intuition que là où elle jette de la lumière sur les fonctions et la nature du concept. Le second des arguments de Kant, à savoir que nous pouvons imaginer l'espace vide, mais non l'absence d'espace, est faux s'il s'agit d'un espace sans aucune matière nulle part, et il ne porte pas s'il s'agit simplement d'un espace compris entre des corps matériels et regardé comme vide [2]. Le seul argument de quelque importance est donc le premier. Mais je dois insister tout d'abord sur ceci, que notre problème est purement logique, et que toutes les implications

---

[1] Pour une discussion plus approfondie de ce point, *voir* Chapitres III et IV

[2] *Voir* le Chapitre IV pour une discussion de cet argument.

psychologiques doivent être exclues autant que possible. D'ailleurs, comme on le prouvera dans le Chapitre IV, la fonction propre de l'espace est d'établir une distinction entre les différentes choses représentées, et non entre le moi et l'objet de la sensation ou de la perception. L'argument devient alors le suivant : la conscience d'un monde de choses extérieures les unes aux autres postule, dans la représentation, un élément connu, mais non inféré, qui permette la discrimination des objets représentés. Cet élément ne doit pas être inféré, car d'un nombre ou d'une combinaison quelconque de représentations, qui ne postulent pas elles-mêmes de la diversité dans leurs objets, on ne serait jamais conduit à inférer l'extériorité mutuelle de leurs objets. Kant dit : « Pour que les sensations puissent être attribuées à quelque chose d'extérieur à moi... et semblablement pour que je puisse être capable de les représenter comme en dehors et à côté les unes des autres... il faut que la représentation de l'espace soit déjà présente (¹). » Mais cela va un peu trop loin : en premier lieu, la question devrait porter seulement sur l'extériorité mutuelle des choses représentées, et non sur leur extériorité par rapport au moi (²); et, en second lieu, les choses apparaîtront extérieures les unes aux autres, si je possède la représentation d'une forme *quelconque* d'extériorité, euclidienne ou non-euclidienne. Quelle que puisse être la vérité de la partie *psychologique* de cet argument (dont la validité n'a rien à voir ici), la partie *logique* s'applique, non à l'espace euclidien, mais seulement à n'importe quelle forme d'extériorité qui pourrait exister intuitivement, et qui permettrait à des êtres possédant nos lois intellectuelles de connaître un monde de choses diverses, mais en relation réciproque.

En outre, pour rendre entièrement logique la portée de l'argument, il ne faut pas laisser à l'extériorité un sens de sensation ou d'intuition, quoiqu'elle soit nécessairement sup-

---

(¹) *Critique de la Raison pure*, Esthétique transcendantale, § 2, n° 1 (2ᵉ édition, p. 38).

(²) *Voir* Chapitre IV, § 185.

posée donnée dans une sensation ou dans une intuition. Elle doit signifier, dans cet argument, le fait de l'*altérité* [1], le fait d'être différent d'une autre chose : elle doit envelopper la distinction entre différentes choses, et être cet élément qui, dans un état cognitif, permet la discrimination des parties intégrantes de son objet. Voici donc à quoi se réduit la portée de l'argument de Kant : l'expérience de choses diverses, mais en relation réciproque, postule, comme condition nécessaire, quelque élément sensitif ou intuitif, dans la perception, qui nous conduise à attribuer de la complexité aux objets de la perception [2]; cet élément, pris isolément, peut être appelé une forme d'extériorité; et s'il se trouve une telle forme, on devra considérer comme *a priori* celles de ses propriétés qu'on peut déduire de sa seule fonction, qui est de rendre possible l'expérience d'une diversité en corrélation. Quelles sont ces propriétés, et comment il se fait que les diverses méthodes indiquées ici convergent toutes à un seul et même résultat, c'est ce que nous verrons dans les Chapitres III et IV.

59. Chez les philosophes qui suivirent Kant, la métaphysique a tellement prédominé, la plupart du temps, sur l'Épistémologie, qu'ils n'ajoutèrent que peu de chose à la théorie de la Géométrie. Ce qui fut ajouté provint indirectement du seul philosophe qui réagit contre les spéculations purement ontologiques de son temps, à savoir Herbart. Les idées propres de Herbart sur la Géométrie, qui se trouvent principalement dans la première section de sa *Synechologie*, ne sont pas d'une grande valeur, et n'ont pas porté beaucoup de fruits dans le développement du sujet. Mais sa théorie psychologique de l'espace, sa construction de l'étendue avec des séries de points, sa comparaison de l'espace avec les séries de sons et de couleurs, sa tendance générale à préférer le discontinu au continu, enfin son

---

(1) On entend par ce mot une différence de substance, plutôt que d'attribut; une différence qu'on pourrait appeler *réelle*, par opposition à la diversité logique.

(2) Cette proposition sera établie tout au long dans le Chapitre IV.

opinion qu'il importait beaucoup de classer l'espace avec d'autres formes sériaires (*Reihenformen*) (1), ont donné naissance à plusieurs des spéculations magistrales de Riemann, et ont encouragé la tentative de définir la nature de l'espace par sa seule face analytique et quantitative (2). Par l'influence qu'il a exercée sur Riemann, il a acquis, indirectement, une grande importance dans la Philosophie géométrique. Il nous faut maintenant revenir à la dissertation de Riemann, dont nous avons déjà discuté le côté mathématique, en considérant seulement, cette fois, ses opinions philosophiques.

RIEMANN.

60. Le but de la dissertation de Riemann, nous l'avons vu dans le Chapitre I, était de définir l'espace comme une espèce de multiplicité, c'est-à-dire comme une sorte particulière de collection de grandeurs. On supposait ainsi, dès le début, que les figures spatiales peuvent être regardées comme des grandeurs, et, par suite, les axiomes que l'on obtenait déterminaient seulement la place particulière de ces figures parmi les nombreuses variétés algébriquement possibles de grandeurs. La manière dont on formule en conséquence les axiomes (parfaitement louable au point de vue mathématique de la Géométrie métrique) doit être regardée, à mon avis, comme une pétition de principe au point de vue philosophique. En effet, lorsqu'on est arrivé à considérer les figures spatiales comme des grandeurs, on a déjà fait la partie la plus difficile du chemin. Les axiomes de la Géométrie métrique (et c'est exclusivement la Géométrie métrique que considère l'essai de Riemann) peuvent se répartir en deux classes, comme on le verra dans le Chapitre III. La première classe contient les

(1) Voir *Psychologie als Wissenschaft*, t. I, section 3, Chap. VII; t. II, section 1, Chap. III et section 2, Chap. III. *Cf.* aussi *Synechologie*, section I, Chap. II et III.

(2) Pour l'influence de Herbart sur Riemann, *cf.* ERDMANN, *Die Axiome der Geometrie*, p. 30.

axiomes communs à Euclide et à la Métagéométrie, les seuls qui aient été sérieusement étudiés par Riemann; or ces axiomes ne sont pas des résultats de la mesure ni d'aucune notion de grandeur : ce sont les conditions qui doivent être remplies avant que la mesure devienne possible. Les axiomes de la seconde classe expriment la différence entre les espaces euclidien et non-euclidiens, et ceux-là seuls peuvent être déduits comme résultant de la mesure ou de notions de grandeur. En ce qui concerne la première classe, au contraire, nous verrons que la relativité de la position, qui distingue l'espace de toutes les autres multiplicités connues, excepté le temps, entraîne logiquement la nécessité des trois axiomes les plus distinctifs de la Géométrie: et pourtant cette relativité ne peut pas être considérée comme déduite de notions de grandeur. En Géométrie analytique, par le fait que les systèmes de coordonnées partent de points, et construisent ensuite les lignes et les surfaces, on est tenté de croire que les points peuvent être donnés indépendamment des lignes et indépendamment les uns des autres, et l'on perd ainsi de vue la relativité de la position. L'erreur ainsi suggérée par les Mathématiques fut probablement renforcée par la théorie herbartienne de l'espace, qui, par son caractère sériaire, ainsi que nous l'avons vu, paraissait faciliter une construction par points successifs, et à laquelle Riemann reconnaît être redevable dans sa dissertation et ailleurs. La même erreur reparaît chez Helmholtz, chez qui elle est probablement due entièrement aux méthodes de la Géométrie analytique. C'est un fait surprenant que, dans les écrits de ces deux auteurs, on ne trouve, à ma connaissance, aucune allusion à la relativité de la position, cette propriété de l'espace d'où l'on peut tirer la plus riche moisson de conséquences, comme le montrera notre prochain Chapitre. Or, elle ne résulte d'aucune notion de grandeur, mais elle découle de la nature de notre intuition de l'espace; et cependant personne, assurément, ne peut la considérer comme empirique, puisqu'elle est impliquée dans la possibilité même de localiser les choses *ici* plutôt que *là*.

61. En fait, nous pouvons voir, par une étude purement lo-

gique du jugement de grandeur, que la manière dont Riemann attaque le problème ne peut jamais aboutir, par une méthode légitime, à une formule philosophiquement valable des axiomes. En effet, la grandeur est le résultat de la comparaison de deux objets qualitativement semblables, et le jugement de grandeur néglige tout à fait la face qualitative des objets comparés. Par suite, la connaissance des propriétés essentielles de l'espace ne peut jamais être tirée de jugements de grandeur, puisqu'ils négligent ces propriétés, tout en les présupposant. C'est comme si l'on espérait connaître la nature de l'homme au moyen d'un recensement. De plus, le jugement de grandeur est le résultat d'une comparaison, et partant présuppose la possibilité de la comparaison. Pour savoir si la comparaison est possible, ou par quels moyens elle l'est, il faut connaître les qualités des choses comparées et du milieu où s'effectue cette comparaison; et pour savoir si la comparaison *quantitative* est possible, il faut savoir qu'il y a une identité qualitative entre les choses comparées, ce qui implique encore une connaissance antérieure de leurs qualités. Si les figures spatiales ont été réduites en grandeurs, c'est qu'on a auparavant négligé leur qualité comme connue et semblable à la qualité d'autres figures. Espérer, par conséquent, qu'on atteindra les qualités de l'espace en comparant son expression comme pure grandeur avec d'autres pures grandeurs est une erreur naturelle à un géomètre analytique, mais néanmoins une erreur, d'où l'on ne peut pas revenir au fondement qualitatif de la grandeur spatiale.

62. Il faut donc rejeter absolument la disjonction qui est à la base de la philosophie de l'espace de Riemann : Ou bien, pense-t-il, les axiomes doivent être des conséquences des concepts généraux de la grandeur, ou bien ils ne peuvent être prouvés que par l'expérience (p. 255). Au contraire, répliquerons-nous, tout ce qui *peut* être dérivé des concepts généraux de grandeur ne peut pas être un attribut *a priori* de l'espace, car tous les attributs nécessaires de l'espace sont présupposés dans tout jugement de grandeur spatiale, et ne peuvent, par suite, être des conséquences d'un tel jugement. Ainsi la

disjonction de Riemann suppose réellement ce qui est en question, puisque l'une de ses alternatives est évidemment impossible. Pour formuler les axiomes de la Géométrie métrique, on doit se poser cette question : Quels axiomes, c'est-à-dire quels attributs de l'espace, faut-il présupposer, pour que la comparaison quantitative des parties de l'espace soit possible en général ? Et ce n'est que lorsqu'on aura déterminé ces conditions, qui sont nécessaires *a priori* pour toute science quantitative de l'espace, que se posera la seconde question : Quelles conséquences peut-on tirer, touchant l'espace, des résultats observés de cette science quantitative, c'est-à-dire de la mesure des figures spatiales? Les conditions de la mesure elles-mêmes seront *a priori*, quoiqu'elles ne dérivent d'aucune notion de grandeur, si l'on peut montrer que, sans elles, l'expérience d'une extériorité serait impossible.

Après cette protestation initiale contre la thèse philosophique générale de Riemann, nous allons examiner en détail l'usage qu'il fait de la notion de multiplicité.

63. En premier lieu, il règne, si je ne me trompe, une grande obscurité dans la définition de la multiplicité, dont nous avons donné une traduction presque littérale dans le Chapitre I (§ 19). Et tout d'abord, qu'entend-on par un concept général capable de déterminations variées? Cette propriété n'appartient-elle pas à tous les concepts? Elle offre, certainement, une base au dénombrement, mais si elle doit s'appliquer à la grandeur continue, il faut assurément avoir quelque formule moins discontinue. Elle peut, par exemple, servir de base à la distinction des points en Géométrie projective, mais la Géométrie projective n'a rien à faire avec la grandeur. Il semble qu'il faille quelque chose de plus fluide et de plus flexible qu'un concept pour servir de base aux grandeurs continues. Ensuite, que faut-il entendre par un *quantum* d'une multiplicité? Dans l'espace, la réponse est aisée : un *quantum* est un fragment de volume. Mais en est-il de même pour l'autre multiplicité continue que cite Riemann, celle des couleurs? Un *quantum* de couleur signifie-t-il une seule ligne dans le spectre, ou une bande de

largeur finie? Dans l'un ou l'autre cas, quelles sont les grandeurs à comparer? Et comment la superposition est-elle nécessaire, ou même possible? Une couleur est déterminée par sa position dans le spectre : deux lignes du même spectre ne peuvent pas être superposées, et deux lignes prises dans des spectres différents n'ont pas besoin de l'être : leurs positions dans leurs spectres respectifs, ou même, approximativement, leur qualité sensible immédiate, suffisent à les identifier. Le fait est que Riemann a en vue l'espace dès le début, et beaucoup de propriétés, qu'il énonce comme appartenant à toutes les multiplicités, appartiennent, en réalité, uniquement à l'espace. On ne comprend pas trop ce que sont ces grandeurs que les déterminations variées rendent possibles. Ces grandeurs mesurent-elles les éléments de la multiplicité, ou bien les relations entre ces éléments? C'est là, certes, un point vraiment fondamental, et pourtant Riemann n'y touche jamais. Dans le premier cas, la superposition dont il parle devient inutile, puisque la grandeur est inhérente à l'élément considéré. On n'a pas besoin de la superposition pour mesurer les grandeurs qui correspondent aux divers sons ou aux diverses couleurs; on peut les découvrir en analysant chaque couleur ou chaque son. Dans l'espace, au contraire, si l'on cherche des éléments, on n'en peut trouver d'autres que les points; or, aucune analyse d'un point ne découvrira de grandeurs qui lui soient inhérentes; de telles grandeurs sont une fiction de la Géométrie analytique (1). Comme nous le verrons dans le Chapitre III, les grandeurs que comporte l'espace sont des relations entre des points, et c'est pour cette raison que la superposition est essentielle à la mesure spatiale. Un point unique ne possède aucune qualité intrinsèque qui permette de le distinguer quantitativement d'un autre, comme c'est le cas pour une couleur simple. Ainsi la notion d'une multiplicité, telle que la définit Riemann, ou bien ne comprend pas les couleurs, ou bien n'im-

---

(1) Il s'agit de l'*intensité* attribuée à chaque élément (point) dans le système des coordonnées homogènes. (*Note de M. L. Couturat.*)

plique pas la superposition comme l'unique procédé de mesure. Il n'y a pas moyen d'échapper à ce dilemme.

64. Mais si « la mesure *consiste* dans la superposition des grandeurs comparées » (p. 256) ([1]), ne s'ensuit-il pas immédiatement que la mesure *ne* soit logiquement possible *que* là où une telle superposition laisse les grandeurs invariables, et, par suite, que la mesure, telle qu'elle a été définie ci-dessus, implique, comme condition *a priori*, que les grandeurs restent invariables dans le mouvement? Riemann ne tire pas cette conséquence; en fait, il se met immédiatement (p. 256-257) à considérer ce qu'il appelle une branche générale de la Science des grandeurs (*Grössenlehre*), indépendante de la mesure. Mais comment peut-il y avoir une Science des grandeurs quelconque où les grandeurs ne puissent pas être mesurées? La raison de cette confusion réside dans ce fait que la définition de la mesure de Riemann n'est pas applicable à une seule multiplicité autre que l'espace; car cette mesure dépend de cette propriété remarquable, que ce que l'on mesure, en Géométrie, ce ne sont pas les points, mais les relations entre les points, et celles-ci peuvent évidemment être inaltérées par le mouvement sans que ceux-là le soient. Essayons, par exemple, d'appliquer aux couleurs la définition de la mesure de Riemann. Il faut se rappeler que, quand il s'agit de la multiplicité des couleurs, un mouvement signifie, non pas un mouvement dans l'espace, mais un mouvement dans la multiplicité des couleurs elle-même. Or, comme chaque point de cette multiplicité est complètement déterminé par trois quantités qui sont données en fait et ne peuvent être arbitrairement choisies, il est clair qu'il ne saurait être aucunement question d'une mesure par superposition, attendu qu'elle implique le mouvement et, par suite, le changement dans les quantités déterminantes. La superposition d'une couleur à une autre, comme moyen de mesure, est un pur non-sens. Et pourtant la mesure est possible dans la multiplicité des couleurs, au moyen de la loi du mélange de Helmholtz (*Mischungsge-*

([1]) *Cf.* § 19. (*Note du traducteur.*)

setz) (1): mais c'est la mesure de chaque élément séparé, et non des relations entre ces éléments : elle est donc radicalement différente de la mesure spatiale (2). Les éléments ne sont pas, comme les points dans l'espace, qualitativement semblables, et ne se distinguent pas uniquement par leur mutuelle extériorité. Nous avons dans les couleurs trois éléments fondamentaux qualitativement distincts et, en les prenant dans certaines proportions, nous pouvons construire tous les autres éléments de la multiplicité, chacun des éléments résultants présentant la même combinaison de diversité et de similitude qualitatives que les trois éléments originaux. Mais, dans l'espace, que pourrions-nous faire d'un tel procédé? Étant donnés trois points, comment ferions-nous pour les combiner en certaines proportions? Ces mots n'ont pas de sens. Si l'on me fait cette objection facile que nous avons à combiner des lignes, et non des points, ma réplique est également facile à trouver. Et d'abord, les lignes ne sont pas des éléments. Métaphysiquement, l'espace *n'a pas* d'éléments, puisque, comme la suite le montrera, il se compose de pures relations entre des éléments non spatiaux. Mathématiquement, ce fait se manifeste dans la notion contradictoire du point, ou zéro de grandeur dans l'espace, qui apparaît comme la limite dans notre vaine recherche d'un élément spatial. Mais, quand même on accorderait à la ligne le rôle d'élément spatial, que nous donne la combinaison de trois lignes en

---

(1) Il s'agit de la définition de chaque couleur par le mélange de trois couleurs simples en proportion déterminée. Les quantités relatives de chaque couleur simple qui entrent dans ce mélange constituent les trois coordonnées de la couleur en question, considérées comme coordonnées triangulaires; elles fixent sa place dans le *triangle chromatique* de Helmholtz, dont les trois sommets figurent les couleurs fondamentales. (*N. B.* : Pour Erdmann, au contraire, les trois coordonnées d'une couleur sont trois variables hétérogènes : le *ton*, c'est-à-dire la nuance déterminée par la place de la couleur dans le spectre; l'*intensité*, c'est-à-dire la quantité de lumière que contient la couleur; et le *degré de saturation*, inverse de la quantité de blanc qui s'y trouve mêlée.) (*Note de M. L. Couturat.*)

(2) Je ne veux pas dire que cette mesure des couleurs s'effectue sans référence à leurs relations, car toute mesure est essentiellement une comparaison. Mais, dans les couleurs, ce sont les éléments que l'on compare, tandis que, dans l'espace, ce sont les relations entre les éléments.

proportions définies? Elle nous donne simplement les coordonnées d'un *point*. Ici encore, nous voyons une grande différence entre la multiplicité des couleurs et celle de l'espace. Dans les couleurs, la combinaison de plusieurs quantités donne une nouvelle quantité de la même espèce ; dans l'espace, elle définit, non pas une quantité, mais un prétendu élément d'une autre espèce que les quantités qui le définissent. Nous trouverions encore des conditions différentes dans la multiplicité des sons ([1]). Ici, aucune des grandeurs mesurantes ne peut s'évanouir sans que le son s'évanouisse aussi, et toutes les trois sont liées ensemble de telle sorte dans l'unique sensation résultante, qu'aucune d'elles ne peut exister sans une quantité finie des autres. Elles sont toutes qualitativement différentes l'une de l'autre deux à deux, et elles diffèrent de chaque son possible, bien qu'elles le constituent, de même que la masse et la vitesse sont des éléments constitutifs du moment ([2]). Toutes ces conditions diverses demandent à être examinées avant qu'une multiplicité puisse être complètement définie; et tant qu'on n'a pas procédé en détail à un tel examen, on ne peut pas se prononcer sur la nature *a priori* ou empirique des lois de la multiplicité. J'ai essayé un tel examen, en ce qui concerne l'espace, dans les troisième et quatrième Chapitres de cet Essai.

65. Je ne veux pourtant pas nier la grande valeur de la conception de l'espace comme multiplicité. Au contraire, cette conception semble être devenue essentielle à tout essai de traiter la question. Je veux seulement faire ressortir que l'étude purement algébrique d'une multiplicité, si importante qu'elle

---

([1]) Les trois coordonnées d'un son, suivant Erdmann, sont : la *hauteur*, l'*intensité* et le *timbre*. Il importe de remarquer que le timbre n'est nullement une grandeur linéaire : il dépend de la forme des vibrations. La hauteur est mesurée par le nombre de vibrations exécutées en une seconde (ce nombre se mesure au moyen de la sirène ou d'un compteur graphique) : l'intensité dépend de l'amplitude des vibrations, et le timbre provient des harmoniques qui se superposent au son fondamental. Le timbre n'étant pas une grandeur linéaire, on a proposé de le remplacer par la *durée*. (*Note du traducteur.*)

([2]) En français : de la quantité de mouvement, *mv*.

(*Note du traducteur.*)

soit pour déduire des conséquences nouvelles de prémisses connues, tend plutôt à cacher qu'à élucider la base de ces prémisses elles-mêmes et est, par suite, fallacieuse dans un examen philosophique. En Mathématique, où la grandeur règne souverainement, la conception de Riemann s'est montrée extrêmement féconde; en Philosophie, au contraire, où la grandeur apparaît plutôt comme un voile qui cache les qualités dont elle fait abstraction, cette conception me semble propre à engendrer des erreurs et des confusions, plutôt qu'une saine doctrine.

Nous sommes ainsi ramené à notre point de départ, à savoir la fausseté de la disjonction initiale de Riemann, et le paralogisme qui en résulte dans sa démonstration de la nature empirique des axiomes. Sa Philosophie est surtout viciée, à mon avis, par ce paralogisme, et par cette supposition, dénuée de critique, qu'un système de coordonnées métriques peut être posé et employé à la mesure de l'espace, indépendamment de tout axiome [1]. Il a manqué à Riemann d'observer ce que j'essaierai de prouver dans le Chapitre suivant, à savoir que la Géométrie deviendrait impossible, si l'espace n'avait pas une courbure rigoureusement constante; et, de plus, que l'absence d'une courbure constante implique que la position est absolue, ce qui est une absurdité. Il a été par là amené à cette conclusion, que tous les axiomes géométriques sont empiriques et peuvent ne pas valoir dans l'infiniment petit, où l'observation est impossible. Il dit en effet (p. 267) : « Maintenant les concepts empiriques sur lesquels sont fondées les mesures spatiales, à savoir, les concepts de corps rigide et de rayon lumineux, paraissent perdre leur validité dans l'infiniment petit : il est donc parfaitement concevable que les relations de grandeurs spatiales dans l'infiniment petit ne correspondent pas aux présuppositions de la Géométrie, et nous devrions admettre, en fait, cette hypothèse, dès qu'elle nous permettrait d'expliquer plus simplement les phénomènes [2]. » Je ne puis aucunement adhérer à cette

---

[1] Pour la discussion de ce point, *voir* Chap. III, Sect. B, § 176.

[2] Voir *Œuvres mathématiques de Riemann*, p. 297. Gauthier-Villars; 1898. Tirage à part, p. 16 (Hermann).

conclusion. De très grands espaces peuvent s'éloigner notablement de la Géométrie euclidienne, parce qu'ils dépendent de l'axiome des parallèles, qui n'est pas impliqué dans l'axiome de Libre Mobilité; mais, dans l'infiniment petit, les divergences ne peuvent être dues qu'à l'absence de Libre Mobilité, qui est absolument impossible, ainsi que j'espère le montrer dans mon troisième Chapitre.

HELMHOLTZ.

66. Comme Riemann, Helmholtz a tenu une grande place à la fois dans la Théorie mathématique et dans la Théorie philosophique de la Géométrie. Son œuvre a déjà été considérée, au point de vue mathématique, dans le Chapitre I; l'étude de sa philosophie, qui doit nous occuper ici, sera une tâche plus importante. Comme Riemann, il s'est efforcé de prouver que tous les axiomes sont empiriques et, comme lui, il a fondé sa démonstration principalement sur la Métagéométrie. Mais il a tiré des ressources supplémentaires de la Physiologie des sens, qui lui fournit la première occasion de rejeter l'Esthétique transcendantale, et le mit à même d'attaquer Kant du côté psychologique aussi bien que du côté mathématique (¹).

(¹) Les travaux de Helmholtz sur la Géométrie comprennent, outre les articles cités dans le Chapitre I (§ 24), les articles suivants : « *Origine et sens des axiomes géométriques* (*contre Land*) », ap. *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. II, p. 640; 1878. (Aussi dans le *Mind*, t. III, en réponse à Land dans le *Mind*, t. II.) « *Origine et signification des axiomes géométriques* » (1870), ap. *Vorträge und Reden*, t. II, p. 1. (Aussi dans le *Mind*, t. I.) *Cf.* deux articles sur les *Axiomes de la Géométrie; leur origine et leur signification*, ap. *Revue des cours scientifiques*, 1870, et *Revue scientifique*, 1877. Deux appendices aux « *Faits dans la perception* », intitulés : II : « *L'espace peut être transcendantal, sans que les axiomes le soient* »; et III : « *L'application des axiomes au monde physique* », 1878, ap. *Vorträge und Reden*, t. II, p. 256 et suiv.

Ces deux derniers appendices sont des vulgarisations et des développements de l'article du *Mind*, t. III. De tous les écrits d'Helmholtz sur la Géométrie, le plus répandu, quoique, à mon avis, le moins solide, est l'article du *Mind*, t. I. Il contient les fameuses analogies si souvent mal comprises du Pays plat et du Pays sphérique, que nous discuterons et que nous défendrons autant que possible, en répondant aux attaques dirigées par Lotze contre la

Les points principaux sur lesquels doit porter une critique de Helmholtz sont les suivants : Le premier est son criterium de l'*a priori;* le second, sa discussion avec Land sur l'*imaginabilité* des espaces non-euclidiens; le troisième, et de beaucoup le plus important des trois, est sa théorie sur la dépendance de la Géométrie à l'égard de la Mécanique. Nous allons discuter successivement ces trois points.

67. Le criterium de l'apriorité pour Helmholtz est difficile à découvrir, car il n'en a jamais, à ma connaissance, donné un énoncé précis. Toutefois, de sa discussion de la Géométrie physique et de la Géométrie transcendantale ([1]), il semble ressortir qu'il regarde comme empirique tout ce qui s'applique à une matière empirique. Il y soutient, en effet, que, même si l'espace était une forme *a priori,* toute Géométrie qui viserait à s'appliquer à la Physique devrait être nécessairement empirique ([2]), puisque les positions actuelles des corps ne sont pas connues *a priori.* Il semble très probable qu'il regarde cela comme un criterium possible, attendu qu'il est adopté, dans plusieurs passages, par son disciple Erdmann ([3]), et un si étrange criterium n'aurait guère pu être accepté par un philosophe, s'il ne l'avait trouvé chez son maître. Je l'appelle un étrange criterium, parce qu'il me semble méconnaître complètement l'œuvre de la Philosophie critique. Car s'il y a une chose qui, eût-on pu espérer, a été suffisamment élucidée par la critique de Kant, c'est que la connaissance *a priori,* étant elle-même la condition de l'expé-

---

Métagéométrie; attaques qui paraissent presque entièrement fondées sur ce seul article populaire. La présente discussion peut donc se borner presque exclusivement à l'article du *Mind,* t. III, et aux parties philosophiques des deux articles cités dans le Chapitre I, c'est-à-dire aux articles des *Wissenschaftliche Abhandlungen,* t. II, p. 610 à 660. Ses autres ouvrages sont de vulgarisation, et n'ont d'importance qu'à cause du grand public auquel ils s'adressent.

([1]) Dans sa réponse à Land, *Mind,* t. III, et *Wiss. Abh.,* t. II, p. 640.

([2]) *Voir* aussi *Les faits dans la perception,* Appendice II : L'espace peut être transcendantal sans que les axiomes le soient (*Vorträge und Reden,* t. II).

([3]) *Voir* plus bas la critique d'Erdmann, § 84.

rience possible, s'applique (et, dans le système de Kant, s'applique uniquement) à une matière empirique. Par suite, quand Helmholtz et Erdmann posent ce criterium sans discussion, ils méconnaissent simplement l'existence de Kant et la possibilité d'un raisonnement transcendantal. Helmholtz suppose toujours que la connaissance empirique doit être entièrement empirique, qu'il ne peut y avoir aucune condition *a priori* de l'expérience en question, que l'expérience sera toujours possible et peut donner toute sorte de résultats. Ainsi, en discutant la Géométrie « physique », il admet que la possibilité de la mesure empirique n'implique aucun axiome *a priori*, et qu'aucun élément *a priori* ne peut être enveloppé dans cette opération. Cette présomption est tout à fait injustifiable, comme nous le verrons dans le Chapitre III : la possibilité de mesurer la *matière* implique, en fait, certaines propriétés de l'*espace*. Par conséquent, malgré le fait que nos mesures s'appliquent à une matière empirique, et que, partant, nos résultats sont empiriques, il peut bien y avoir dans la mesure un élément *a priori* que présuppose la possibilité de cette mesure. Avec un pareil criterium, on pourrait prouver que tout est empirique; mais cela prouve plutôt qu'il est lui-même sans valeur.

On trouve, il est vrai, dans Helmholtz, un autre et un meilleur criterium, qui a été aussi adopté par Erdmann. Ce criterium peut s'énoncer : tout ce qui aurait pu, par une expérience différente, être rendu différent, doit dépendre lui-même de l'expérience et, par suite, être empirique. Ce criterium semble parfaitement valable, mais l'emploi qu'en fait Helmholtz est d'ordinaire vicieux, parce qu'il néglige de prouver la possibilité de cette expérience différente. Il dit, par exemple, que si notre expérience ne nous montrait que des corps qui changent de forme dans le mouvement, nous n'arriverions pas à l'axiome de congruence, qu'il déclare par conséquent empirique. Or j'essaierai de prouver, dans le Chapitre III, que sans l'axiome de congruence on ne pourrait avoir l'expérience d'une grandeur spatiale. Si ma démonstration est juste, il s'ensuit qu'aucune expérience ne peut jamais révéler des grandeurs spatiales qui contredisent cet axiome; et c'est là une possibilité que

Helmholtz ne discute nulle part, en posant son expérience hypothétique. Ainsi ce second criterium, quoique parfaitement correct, a toujours besoin d'être accompagné d'un raisonnement transcendantal, touchant les conditions de l'expérience possible, que l'on trouve très rarement chez Helmholtz.

68. Une des rares occasions où Helmholtz a essayé d'un tel raisonnement se trouve liée à notre second point, à savoir l'imaginabilité des espaces non-euclidiens. Son argumentation sur ce point fut provoquée par ses adversaires kantiens, qui soutenaient que la possibilité purement logique de ces espaces ne prouvait rien, attendu que la base de la Géométrie n'est pas la logique, mais l'intuition. Les axiomes, disaient-ils, sont des propositions synthétiques; leurs contraires ne sont donc pas contradictoires; ce sont néanmoins des propositions apodictiques, parce que nous ne pouvons avoir aucune autre *intuition* que celle de l'espace euclidien (¹). J'ai déjà critiqué cet ordre d'arguments au commencement de ce Chapitre. Mais la réponse de Helmholtz était différente : admettant que l'argument était conséquent en soi, il niait une de ses prémisses. Nous *pouvons*, disait-il, imaginer les espaces non-euclidiens, bien que le manque d'habitude nous le rende difficile. De cette thèse il résultait naturellement que l'argument de Kant, lors même qu'il serait formellement valide, ne peut prouver l'apriorité de l'espace euclidien en particulier, mais seulement celle de l'espace général qui comprend à la fois les espaces euclidien et non-euclidiens (²).

Quoique je m'accorde avec Helmholtz à penser que la distinction des espaces euclidien et non-euclidiens est empirique, je ne puis considérer son argument en faveur de l'*imaginabilité* de ces derniers comme très heureux. La validité de toute preuve de ce genre doit évidemment reposer sur la définition de l'imaginabilité. Voici celle que Helmholtz donne dans sa

---

(¹) *Voir* LAND, dans le *Mind*, t. II.

(²) *Voir* le paragraphe final de l'article de HELMHOLTZ dans le *Mind*, t. III.

réponse à Land : L'imaginabilité postule « la possibilité de se représenter complètement les impressions sensibles qui éveillent en nous l'objet correspondant suivant les lois connues de nos organes des sens sous toutes les conditions concevables de l'observation, et par lesquelles il peut se distinguer d'autres objets semblables [1] ». Cette définition n'est pas très claire, à cause de l'ambiguïté du mot *Vorstellbarkeit* (possibilité de se représenter). La définition suivante semble moins ambiguë : « Quand la série des impressions sensibles peut être donnée d'une manière complète et univoque, on doit à mon avis reconnaître que la chose peut être *représentée intuitivement* [2]. » Cela montre bien (ce qui ressort aussi de sa manière de démontrer) qu'il regarde une chose comme imaginable quand elle peut être *décrite* en termes conceptuels. Mais, comme le remarque Land [3], « ce n'est pas là le sens requis par l'argumentation dans ce cas ». Que cette critique de Land soit juste, c'est ce que montre la démonstration de Helmholtz pour les espaces non-euclidiens, car elle consiste seulement en une analogie avec le volume compris à l'intérieur d'une sphère, laquelle est obtenue mathématiquement de la manière suivante : On prend les symboles qui représentent les grandeurs dans l'espace « pseudo-sphérique » (hyperbolique), et on leur donne un nouveau sens euclidien ; toutes les propositions symboliques deviennent ainsi capables de deux interprétations, l'une pour l'espace pseudo-sphérique et l'autre pour le volume contenu dans une sphère. Mais il est trop manifeste que cette manière de procéder, tout en permettant de *décrire* notre nouvel espace, ne nous rend pas capables de l'*imaginer*, c'est-à-dire d'évoquer les images de la manière dont nous y verrions les choses. Nous ne retirons pas en réalité de cette analogie une connaissance plus grande qu'un aveugle-né n'en retirerait à l'égard de la lumière d'une analogie avec la chaleur. L'aphorisme « *Nihil est in intellectu quod non prius fuerit in sensu* » serait incon-

---

(1) *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. II, p. 644.

(2) *Vorträge und Reden*, t. II, p. 234.

(3) *Mind*, t. II, p. 45.

testablement vrai, si l'on substituait *imagination* à *entendement; si* donc notre espace actuel est euclidien, il est vain d'espérer avoir la faculté d'*imaginer* un espace non-euclidien. Tout ce que Helmholtz aurait pu alléguer contre Land (avec toute raison, je crois) c'est que l'image que nous avons de l'espace n'est pas suffisamment précise pour exclure, de l'espace actuel que nous connaissons, toute possibilité d'une légère divergence d'avec le type euclidien. Mais à mon avis, Land est incontestablement dans le vrai, en soutenant que nous ne pouvons imaginer un espace différent de celui que nous avons actuellement, quoique nous puissions le concevoir et le décrire. Pour un pur kantien qui soutient, comme Land, qu'aucun des axiomes ne peut être prouvé, cette question est d'une grande importance. Mais si, comme je l'ai avancé, quelques-uns des axiomes sont susceptibles d'une démonstration transcendantale, tandis que les autres peuvent être vérifiés empiriquement, la question est affranchie de toute implication psychologique, et l'imaginabilité ou la non-imaginabilité des espaces métagéométriques perd toute importance.

69. Nous arrivons maintenant à la troisième et à la plus importante question, au rapport de la Géométrie à la Mécanique. Il y a trois manières de comprendre l'argument que Helmholtz tire de la rigidité des corps : la première est, je crois, le sens dans lequel il l'a compris à l'origine; la seconde semble être le sens qu'il a adopté dans sa réponse à Land; la troisième est le sens admis par Land, et le sera aussi dans la discussion suivante. Ces trois sens sont les suivants :

1° On peut soutenir que la signification actuelle de l'axiome de Libre Mobilité consiste à affirmer l'existence de corps rigides empiriques, et que les deux propositions sont équivalentes l'une à l'autre. Cela est certainement faux.

2° On peut dire que l'axiome de Libre Mobilité se distingue logiquement de l'affirmation de l'existence de corps rigides et peut même ne pas être empirique; mais qu'il est stérile, même pour la Géométrie pure, sans l'aide de mesures, qui doivent

être elles-mêmes des corps rigides empiriques. Ce sens est plus plausible que le premier, mais nous pouvons montrer, je crois, que dans ce sens encore la proposition est fausse.

3° On peut dire que, pour la Géométrie pure et l'étude abstraite de l'espace, la Libre Mobilité, appliquée à une matière abstraite et géométrique, fournit une possibilité suffisante de comparaison quantitative; mais du moment où nous étendons nos résultats aux Mathématiques appliquées, et où nous les appliquons à une matière empiriquement donnée, nous avons besoin, comme instruments de mesure, de corps rigides empiriquement donnés, ou tout au moins, de corps qui ne s'écartent de la rigidité que de quantités empiriquement connues. Dans ce sens, je crois, la proposition est correcte (1).

En discutant ces trois sens, je ne m'en tiendrai pas strictement au texte de Helmholtz ou de Land : si je l'essayais, je me heurterais à cette difficulté qu'aucun d'eux ne définit l'*a priori*, et que tous deux sont trop enclins, à mon avis, à le vérifier au moyen de critères psychologiques. Je vais donc prendre ces trois sens tour à tour, sans trop m'attacher à leur conformité historique aux opinions de Land ou de Helmholtz.

70. 1° La congruence peut être prise (comme Helmholtz paraît certainement le désirer) dans ce sens que nous trouvons, dans notre expérience mécanique, des corps réels qui conservent leurs formes avec une constance approximative, et que, de cette expérience, nous inférons l'homogénéité de l'espace. Cette opinion repose, à mon avis, sur une méprise radicale touchant la nature de la mesure et des axiomes qu'elle implique. Qu'entend-on, en effet, par la non-rigidité d'un corps? On entend simplement qu'il a changé de forme. Mais cela implique la possibilité d'une comparaison avec sa forme antérieure, en d'autres termes, d'une mesure. Donc, pour qu'il puisse être question de rigidité ou de non-rigidité, il faut que la mesure des grandeurs spatiales

(1) *Cf.* VERONESE, *Éléments de Géométrie* (traduction allemande), p. IX. *Voir* aussi p. XXXIV, 304, et Note II, p. 692-694.

soit déjà possible. Il s'ensuit que la possibilité de la mesure ne peut, sans cercle vicieux, être elle-même dérivée de l'existence de corps rigides. La mesure géométrique consiste, en fait, dans la comparaison de grandeurs spatiales, et cette comparaison implique l'homogénéité de l'espace, comme on le prouvera tout au long dans le Chapitre III. Elle est, par conséquent, la condition logique préalable de toute expérience des corps rigides, et ne peut pas être le résultat d'une telle expérience. Sans l'homogénéité de l'espace, les notions mêmes de rigidité ou de non-rigidité ne pourraient exister, puisqu'elles signifient, respectivement, la constance ou l'inconstance de la grandeur spatiale en des portions de matière, et que toutes deux, par suite, présupposent la possibilité d'une mesure spatiale. L'homogénéité de l'espace nous apprend qu'un corps, en se mouvant, ne change pas de forme sans quelque cause physique; mais, qu'il ne change pas réellement de forme, c'est ce qu'on n'affirme jamais, et ce qui d'ailleurs est reconnu faux. Dès que la mesure est possible, on peut apprécier les changements réels de forme et rechercher leurs causes empiriques. Mais si l'espace n'était pas homogène, la mesure serait impossible, une forme invariable serait une expression dénuée de sens, et l'on ne pourrait jamais expérimenter la rigidité. Bref, la congruence affirme qu'un corps peut se mouvoir sans changement de forme en tant qu'il ne s'agit que de l'espace pur; la rigidité affirme qu'il se meut réellement ainsi, ce qui est une proposition toute différente, impliquant évidemment la proposition géométrique précédente, comme son antécédent logique.

On peut résumer cet argument par le dilemme suivant : Si les corps changent de forme dans le mouvement (et, jusqu'à un certain point, ils le font tous nécessairement, puisque aucun corps n'est parfaitement rigide), de deux choses l'une : *ou bien* les changements de forme que subissent les corps en passant d'un lieu à l'autre ne suivent aucune loi géométrique, ne sont pas, par exemple, des fonctions de la longueur ou de la direction du mouvement, et dans ce cas le principe de causalité exige qu'ils soient les effets, non pas du changement de lieu, mais de quelque changement non géométrique simultané, comme de

température; *ou bien* les changements sont réguliers, et la grandeur S, dans une nouvelle position p, devient $S f(p)$. Dans ce cas, le principe des variations concomitantes nous conduit à attribuer le changement de grandeur au seul mouvement, et la grandeur devient ainsi une fonction de la position absolue. Mais cela est absurde, car la position *signifie* simplement un terme d'une relation ou d'un ensemble de relations; il est donc impossible que la simple position soit capable de produire des changements dans un corps. La position est un terme dans une relation, et non une chose en soi; elle ne peut donc pas agir sur une chose, ni exister par elle-même à part des autres termes de la relation. Ainsi l'opinion de Helmholtz, que la congruence dépend de l'existence des corps rigides, doit être condamnée comme un paralogisme, puisqu'elle implique le caractère absolu de la position. En fait, la congruence peut se déduire *a priori* de la relativité de la position, comme je le prouverai plus complètement dans le Chapitre III.

71. 2° Le raisonnement précédent me semble répondre d'une manière satisfaisante à l'assertion de Helmholtz sous la forme précise qu'il lui donna d'abord. L'axiome de congruence, il faut le reconnaître, est logiquement indépendant de l'existence des corps rigides. Néanmoins la Géométrie enveloppe logiquement quelque référence à une matière (1), mais c'est une autre question de savoir si cette référence rend la Géométrie empirique, ou si elle ne révèle pas plutôt un élément *a priori* dans la Dynamique.

La référence à une matière est rendue nécessaire par l'homogénéité de l'espace vide. Car tant qu'on fait abstraction de la matière, une position est absolument indiscernable d'une autre, et une science des relations de position est impossible. A vrai dire, pour que des relations spatiales puissent apparaître, il faut détruire l'homogénéité de l'espace vide, et c'est la matière qui doit la détruire. La page blanche n'est d'aucun usage au géomètre, tant qu'il n'a pas rompu son homogénéité par des lignes

(1) *Voir* Chap. IV, § 197 et suiv.

à l'encre ou au crayon. Il n'y a pas, en somme, de figures spatiales concevables sans une référence à une matière qui ne soit pas purement spatiale. Encore une fois, si la congruence doit jamais être employée, il faut qu'il y ait mouvement; mais un point purement géométrique, étant défini uniquement par ses attributs spatiaux, ne peut être supposé se mouvoir sans une contradiction dans les termes. Ce qui se meut doit donc être matière; par conséquent, pour que le mouvement puisse fournir un criterium d'égalité, il faut avoir quelque *matière* connue pour être invariable pendant le mouvement, c'est-à-dire qu'il faut avoir des corps rigides. La difficulté est que ces corps doivent non seulement ne subir aucun changement dû uniquement à la nature de l'espace, mais encore rester inaltérés malgré leur relation variable avec les autres corps. Et ici, nous avons une condition qui ne peut plus être remplie *a priori*, et que, en fait, nous savons être irréalisable à la rigueur. Car les forces qui agissent sur un corps dépendent de ses relations spatiales avec les autres corps, et des forces variables sont propres à produire une configuration variable. Par là, semble-t-il, les mesures réelles ne peuvent qu'être purement empiriques, et doivent dépendre du degré de rigidité qu'on peut obtenir, pendant les opérations de mesure, dans les corps avec lesquels on opère.

Cette conclusion est, je crois, valable pour toute mesure réelle. Mais la possibilité de cette rigidité empirique et approximative, il faut y insister, dépend de cette loi *a priori* que le mouvement *pur* ne peut pas produire un changement de forme sans l'action d'une autre matière. Car, sans cette loi, l'effet d'une autre matière ne pourrait être découvert; les lois du mouvement seraient absurdes, et la Physique impossible. Considérons, par exemple, la seconde loi : comment pourrions-nous mesurer le changement du mouvement, si le mouvement lui-même produisait un changement dans nos instruments de mesure? Ou bien, considérons la loi de la gravitation : comment pourrions-nous établir l'inverse du carré de la distance, si nous n'étions pas à même de mesurer les distances indépendamment de la Dynamique? La Dynamique tout entière, en un mot, dépend fondamentalement de la mesure, et sans la possi-

bilité de mesurer les grandeurs spatiales indépendamment de la Dynamique, aucune des grandeurs de la Dynamique ne pourrait être mesurée. Le temps, la force et la masse se mesurent tous par des corrélatifs spatiaux; ces corrélatifs sont donnés, pour le temps, par la première loi; pour la force et la masse, par la seconde et la troisième [1]. Il est vrai qu'alors un élément empirique apparaît inévitablement dans toute mesure réelle, attendu que nous ne pouvons savoir que par expérience qu'une portion donnée de matière conserve sa forme pendant son mouvement, qui implique nécessairement le changement de ses relations dynamiques avec le reste de la matière; mais pour la Géométrie, qui considère la matière simplement comme le moyen indispensable pour rompre l'homogénéité de l'espace et comme le terme nécessaire des relations spatiales, et non comme le support de forces qui changent la configuration d'autres systèmes matériels; pour la Géométrie, dis-je, qui traite de l'espace et n'est amenée que par un argument phi-

---

[1] Voici, d'après Newton, les trois lois du mouvement :

1° Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, à moins qu'il ne soit obligé de changer cet état par des forces qui lui sont appliquées.

2° Le changement de mouvement est toujours proportionnel à la force motrice appliquée, et il se produit dans la direction suivant laquelle la force est appliquée.

3° A chaque action s'oppose toujours une réaction égale; en d'autres termes, les actions réciproques de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et dirigées en sens contraire.

La première loi (principe de l'*inertie*) définit le corrélatif spatial du temps, car il constitue la définition du mouvement uniforme, et permet de mesurer le temps par l'espace parcouru dans un tel mouvement. La seconde (principe de la *proportionnalité des forces aux accélérations* ou variations de la quantité de mouvement mv d'un corps) définit le corrélatif spatial de la force, puisqu'il l'égale au produit de la masse par l'accélération, laquelle est, comme la vitesse, une grandeur géométrique dirigée, un vecteur. Enfin, la troisième (principe de l'*égalité de l'action et de la réaction*) définit la masse, car elle signifie au fond que deux corps ont des masses égales quand ils échangent des accélérations égales, ou, plus généralement, que deux corps ont des masses inversement proportionnelles aux accélérations qu'engendre leur action réciproque. *Cf.* Mach, *die Mechanik in ihrer Entwickelung*, Chap. II, n°s 5 et 7 (3e éd., Leipzig, Brockhaus; 1897).

(*Note de M. L. Couturat.*)

losophique à admettre cette matière abstraite et purement cinématique, il n'en est pas moins vrai que la rigidité est *a priori*, en tant que les seuls changements dont elle a à connaître (à savoir les changements de simple position) sont incapables d'affecter la grandeur des corps imaginaires et abstraits dont elle s'occupe. Pour employer une distinction scolastique, on peut dire que la matière est la *causa essendi* de l'espace, mais que la Géométrie est la *causa cognoscendi* de la Physique. Sans un système de mesures indépendant de la Physique, la Physique elle-même, qui suppose nécessairement les résultats de la mesure, ne pourrait jamais naître; mais lorsque la mesure est employée en Physique, elle perd quelque chose de sa certitude *a priori*, et acquiert le caractère empirique et approximatif que comportent les déterminations de phénomènes actuels.

72. 3° Cet argument nous amène à la distinction établie par Land entre la rigidité physique et la rigidité géométrique. Cette distinction peut s'exprimer (et je crois qu'elle est mieux exprimée) par la distinction des concepts de la matière qui sont propres à la Dynamique et à la Géométrie respectivement. En Dynamique, on considère la matière comme le sujet et la cause du mouvement, comme exerçant et subissant l'action de *forces*. On étudie, par suite, les changements de configuration spatiale dont les systèmes matériels sont susceptibles : l'objet propre de toute la Dynamique est la description et l'explication de ces changements. Mais pour qu'une telle science puisse exister, il est évidemment nécessaire que la configuration spatiale soit déjà mesurable. S'il n'en était pas ainsi, le mouvement, l'accélération et la force resteraient parfaitement indéterminés. La mesure doit donc déjà exister avant que la Dynamique devienne possible : faire dépendre la possibilité de la mesure des lois du mouvement ou de l'une quelconque de leurs conséquences est un grossier ὕστερον πρότερον (¹). Néan-

(¹) C'est-à-dire un renversement complet dans l'ordre des idées.
(*Note de M. Couturat.*)

moins, comme nous l'avons vu, quelque espèce de matière est nécessaire à la mesure spatiale. Mais cette matière géométrique est une matière plus abstraite et tout autre que celle de la Dynamique. Pour étudier l'espace en lui-même, on réduit les propriétés de la matière au strict minimum : on élimine entièrement la catégorie de causalité, si essentielle à la Dynamique, et on ne conserve à cette matière rien de plus que ses attributs spatiaux [1]. L'espèce de rigidité qu'on affirme de cette matière abstraite (laquelle suffit pour la théorie de notre science, mais non pour son application aux objets de la vie journalière) est purement géométrique, et n'affirme rien de plus que ceci : Puisque notre matière est dépourvue, par hypothèse, de propriétés causales, il ne reste rien, dans le pur espace vide, qui soit capable de changer la configuration d'un système géométrique. Cela veut dire qu'un changement de position absolue n'est rien : en conséquence, le seul changement réel impliqué dans le mouvement d'un corps est un changement des relations qui l'unissent à une autre matière; mais cette autre matière est regardée, pour les besoins de notre science, comme dépourvue de puissance causale; par suite, aucun changement ne peut arriver, dans la configuration de notre système, par le simple effet d'un mouvement à travers l'espace vide. La nécessité d'un tel principe peut être établie par une simple réduction à l'absurde, de la manière suivante : Un mouvement de translation de l'Univers tout entier, avec une direction et une vitesse constantes, est dynamiquement négligeable; à vrai dire, philosophiquement parlant, ce n'est pas un mouvement du tout, car il n'implique aucun changement dans la condition ou les relations mutuelles des choses dans l'Univers. Mais si l'on niait notre rigidité géométrique, le changement du paramètre de l'espace pourrait causer le changement des formes de tous les corps par le simple changement de position absolue, ce qui est évidemment absurde.

Pour rendre tout à fait claire la fonction des corps rigides en

---

(1) *Cf.* l'opinion de Bolyaï, citée par Erdmann, *Axiome*, p. 26, et aussi *ibid.*, p. 60.

Géométrie, supposons un géomètre liquide dans un monde liquide. Nous ne pouvons pas supposer le liquide parfaitement homogène et non différencié, d'abord parce qu'un tel liquide ne pourrait se distinguer de l'espace vide, et ensuite parce que le corps de notre géomètre (à moins qu'il ne fût un esprit désincarné), constituerait lui-même une différenciation dans le monde. Nous pouvons donc imaginer

« Dim beams,
Which amid the streams
Weave a network of coloured light [1], »

et nous pouvons supposer que ce réseau fournisse une occasion aux réflexions de notre géomètre. Il sera alors à même d'imaginer un réseau formé de lignes droites, circulaires, paraboliques ou de toute autre forme, et il pourra inférer que si un tel réseau peut être dessiné dans une région du fluide, il peut l'être aussi dans une autre. Cela formera une base suffisante pour ses déductions. La superposition qu'il considère est purement idéale, puisque la Géométrie n'a pas pour objet l'égalité réelle, mais seulement les conditions formelles de l'égalité; et elle n'est nullement affectée par l'impossibilité de solidifier aucun réseau réel. Mais, pour appliquer sa Géométrie aux besoins de la vie, notre géomètre aurait besoin de quelque étalon de comparaison entre les réseaux réels, et alors, sans doute, il aurait besoin, soit d'un corps rigide, soit de la connaissance des conditions dans lesquelles se produisent des réseaux congruents. D'ailleurs ces conditions, étant nécessairement empiriques, peuvent difficilement être connues en l'absence d'une mesure antérieure. Ainsi l'existence d'*un* corps rigide au moins paraît être essentielle à la Géométrie appliquée, quoiqu'elle ne le soit pas à la Géométrie pure.

73. L'utilité de notre matière géométrique abstraite, pour la Dynamique, est suffisamment évidente. En effet, comme on

---

[1] « De pâles rayons, qui, au milieu du courant, dessinent un réseau de lumière colorée. » SHELLEY, *Arethusa*. (*Note du traducteur.*)

a, par son moyen, le pouvoir de déterminer les configurations des systèmes matériels dans n'importe quelle partie de l'espace, et qu'on sait que des changements de configuration ne sont pas dus au simple changement de lieu, on est en mesure d'attribuer ces changements à l'action d'une autre matière, et de former ainsi la notion de force; ce qui serait impossible, si le changement de forme pouvait être dû à l'espace vide.

Ainsi, pour conclure, la Géométrie postule, pour devenir *pratiquement* possible, un ou plusieurs corps qui soient, ou rigides [au sens dynamique (1)], ou connus pour être soumis à des changements de forme définis suivant une loi déterminée. (On peut supposer que ces changements sont connus par les lois de la Physique, qui ont été expérimentalement établies, et qui supposent constamment la vérité de la Géométrie.) De tels corps sont nécessaires à la Géométrie appliquée, mais seulement dans le sens où sont nécessaires les règles et les compas. Ils sont nécessaires au même titre que, pour dresser la Carte de l'État-Major anglais (*Ordnance Survey*), des appareils soignés furent nécessaires à la mesure de la ligne de base dans la plaine de Salisbury (2). Mais pour la *théorie* de la Géométrie, la rigidité géométrique suffit, et elle signifie seulement qu'une forme qui est possible dans une partie de l'espace est possible dans n'importe quelle autre. L'élément empirique qui apparaît dans la pratique, par suite de la nature empirique de la rigidité physique, est comparable aux inexactitudes empiriques qui proviennent de ce qu'on ne trouve dans le monde ni lignes droites, ni cercles; ce que personne, excepté Stuart Mill, n'a regardé comme rendant la Géométrie elle-même empirique ou

(1) C'est-à-dire non déformables par aucune force, si grande qu'elle soit. (*Note du traducteur.*)

(2) On sait que, pour faire le relevé géodésique d'une contrée, on la recouvre d'un réseau de triangles dont on mesure tous les angles, et que, pour pouvoir en calculer tous les côtés par la Trigonométrie, il suffit de mesurer sur le terrain un seul de ces côtés, qu'on nomme la *base de la triangulation;* mais il faut que cette ligne de base soit mesurée avec une extrême précision, la moindre erreur pouvant se multiplier dans la suite des calculs et en fausser tous les résultats. (*Note de M. L. Couturat.*)

inexacte. Mais faire dépendre la possibilité de la Géométrie de l'achèvement de la Physique, c'est rendre à jamais impossible la Physique, qui dépend d'un bout à l'autre de la mesure. C'est comme si l'on remettait la formation des nombres jusqu'à ce qu'on ait compté les maisons de Piccadilly.

ERDMANN.

74. Il est naturel d'étudier, à propos de Riemann et de Helmholtz, l'Ouvrage philosophique que Benno Erdmann a consacré à leurs théories ([1]). C'est certainement le Livre le plus important qui ait été publié sur le sujet, du côté des philosophes et, bien que, comme toute la théorie de Riemann et de Helmholtz, il soit inapplicable à la Géométrie projective, il mérite encore une discussion très complète.

Erdmann admet d'un bout à l'autre les conclusions de Riemann et de Helmholtz, excepté sur quelques points de moindre importance; et, comme on peut dès lors s'y attendre, ses opinions sont ultra-empiristes. En vérité, sa logique me paraît (quoique j'hésite à l'affirmer) incompatible avec tout autre système que celui de Stuart Mill : il ne fait manifestement aucune distinction entre le général et l'universel, et il n'admet, en conséquence, aucun concept qui ne soit incarné dans une série de cas particuliers. Une telle théorie logique vicie, à mon sens, la plus grande partie de son œuvre, comme elle a vicié la philosophie de Riemann ([2]). Cette critique générale trouvera d'abondantes illustrations au cours de notre exposé des opinions d'Erdmann.

75. Après une introduction générale et une histoire sommaire du développement de la Métagéométrie, Erdmann se

---

([1]) *Les axiomes de la Géométrie : Recherche philosophique sur la théorie de l'espace de Riemann et de Helmholtz*, Leipzig; 1877.

([2]) Sur l'influence de Stuart Mill, *cf.* Stallo, *La Matière et la Physique moderne*, Chap. XIII, p. 168 et suiv., 2e édition; 1891. *Bibliothèque scientifique internationale*, Alcan, t. XLII.

met, dans son second Chapitre, à étudier quels sont les axiomes de la Géométrie euclidienne. Il laisse de côté les soi-disant axiomes arithmétiques, comme s'appliquant à la grandeur en général; ce que nous cherchons ici, dit-il, c'est une définition de l'espace, pour laquelle les axiomes géométriques sont les seuls qui importent. Mais une définition de l'espace, dit-il (à la suite de Riemann), postule un genre dont l'espace soit une espèce, et ne peut être fournie que par les Mathématiques analytiques, puisque notre espace est psychologiquement unique (p. 36). Or les formes spatiales qu'étudie la Géométrie sont des grandeurs, et les notions de grandeur sont partout employées en Géométrie. Mais, avant Riemann, on ne pouvait citer comme grandeurs que des déterminations particulières de l'espace, et l'on ne pouvait, par suite, obtenir la définition désirée. Maintenant, au contraire, nous pouvons subsumer l'espace, considéré comme un tout, sous un concept général de grandeur, et obtenir ainsi, à côté de l'intuition de l'espace et du concept de l'espace, une troisième forme, à savoir, le concept de l'espace comme grandeur (*Grössenbegriff vom Raum*, p. 38-39). La définition de ce concept nous donnera un système d'axiomes complet, mais non surabondant, tandis qu'on ne pouvait l'obtenir en transformant l'intuition générale de l'espace en un concept de l'espace, faute d'une pluralité de cas particuliers (p. 40).

76. Avant de considérer la méthode de définition qui résulte de ces principes, il convient de réfléchir sur les théories qu'implique cet exposé du concept de l'espace comme grandeur. On suppose, en premier lieu, que les concepts ne peuvent être formés que si l'on a une série d'objets séparés dont on puisse abstraire une propriété commune; en d'autres termes, que l'universel est toujours le général. On suppose, en second lieu, que toute définition consiste à classer une espèce dans un genre. En troisième lieu, on commet, si je ne me trompe, un contre-sens fondamental sur le concept de grandeur, quand on le croit applicable à l'espace considéré comme un tout. Mais en

quatrième lieu, lors même qu'un tel concept existerait, il ne pourrait fournir aucune des propriétés essentielles de l'espace. Considérons successivement ces quatre points.

77. Touchant le premier point, il faut observer que les gens avaient certainement quelque idée de l'espace avant que Riemann n'eût inventé la notion de multiplicité, et que cette idée était assurément quelque chose d'autre que les qualités communes à tous les points, lignes ou figures de l'espace. En second lieu, si l'opinion d'Erdmann était vraie, il serait impossible de concevoir Dieu, si ce n'est à un polythéiste, ou bien l'Univers (à moins que, comme Leibnitz, on n'imagine une série de mondes possibles placés en face de Dieu, et dont aucun, par suite, n'est un véritable univers), ou encore, pour prendre un exemple plus approprié à un empiriste, le centre de gravité (nécessairement unique) de l'univers matériel. En somme, toute idée universelle qui est un lien ou une unité entre des choses, et non simplement une propriété commune à plusieurs objets indépendants, devient impossible dans la thèse d'Erdmann. On ne peut donc pas, à moins d'adopter intégralement la philosophie de Mill, regarder le concept de l'espace comme exigeant une série de cas particuliers sur lesquels s'opère l'abstraction. Mais, lors même qu'on le pourrait, les multiplicités de Riemann nous laisseraient sans ressources. Car l'espace euclidien apparaît encore comme unique, à la fin de la série de ses déterminations. On a diverses espèces de multiplicités, mais non diverses espèces d'espace euclidien. Ainsi, quand même la théorie des concepts d'Erdmann serait correcte, elle ne conduirait encore qu'à une recherche vaine quand il s'agit du concept de l'espace euclidien.

78. En second lieu, la thèse que toute définition est classification est intimement liée à la première, et toutes les deux nous entraînent dans les abîmes de la logique formelle scolastique. Les mêmes choses particulières qui, suivant l'opinion d'Erdmann, ne peuvent être conçues, se présentent maintenant

comme des choses qui ne peuvent être définies. Tout ce que nous avons dit ci-dessus est encore applicable ici, et, par suite, ce point n'a pas besoin d'être plus longuement discuté (1).

79. Touchant le troisième point, savoir l'impossibilité d'appliquer des concepts de grandeur à l'espace considéré comme un tout, une argumentation plus étendue sera nécessaire, car la question qui se pose ici n'est rien moins que celle de la nature logique des jugements de grandeur. De même que nous avions auparavant trop d'éléments de comparaison pour nos besoins, nous en avons maintenant trop peu. Je vais essayer d'expliquer ce point, qui est d'une grande importance, et qui, je crois, est le principe de la plupart des paralogismes philosophiques de l'école de Riemann.

Un jugement de grandeur est toujours un jugement de comparaison, et, qui plus est, cette comparaison ne porte jamais sur la qualité, mais seulement sur la quantité. Dans le jugement de grandeur, la qualité est supposée identique, dans l'objet dont on mesure la grandeur, et dans l'unité à laquelle on le compare. Mais la qualité est toujours présente, excepté dans le nombre pur, et dans la grandeur pure telle que la traite l'Analyse; elle est en partie absorbée dans la grandeur, et en partie négligée par le jugement de la grandeur. Comme dit Bosanquet (2): « La comparaison quantitative n'est pas *prima facie* coordonnée avec la comparaison qualitative; elle lui succède plutôt, comme l'*effet de la comparaison portant sur la qualité*, laquelle, en tant que comparable, *devient quantité*, et, en tant qu'incomparable, fournit la distinction des parties essentielles au tout quantitatif. » Ainsi, si l'on veut regarder l'espace comme une grandeur, il faut être à même de citer toutes les séries de cas particuliers dont parle Erdmann, et qui ont paru n'avoir rien à faire avec le concept de l'espace.

---

(1) Cette opinion semble provenir de Herbart, par l'intermédiaire de Riemann. Voir sa *Psychologie comme Science*, édit. Hartenstein, t. V, p. 262.

(2) *Logic*, t. I, p. 124 (les italiques sont dans l'original).

Mais il reste à prouver que la comparaison que l'on *peut* établir entre divers espaces est susceptible d'être exprimée sous une forme quantitative. Il semblerait plutôt que la différence de qualité est de nature à exclure la comparaison quantitative entre des espaces différents et, par conséquent, à exclure aussi tout jugement de grandeur portant sur l'espace conçu comme un tout. Ici, on peut croire qu'il faille faire exception pour les espaces non-euclidiens, dont les constantes spatiales offrent une grandeur définie, inhérente à l'espace conçu comme un tout, et par suite, semble-t-il, caractérisant l'espace comme une grandeur. Mais c'est là une erreur. Car, dans ces espaces, la constante spatiale est l'unité ultime, le terme fixe de toute comparaison quantitative; elle est donc elle-même, en tant qu'on la compare à d'autres constantes spatiales, privée de grandeur, puisqu'il n'y a aucune grandeur donnée indépendamment à laquelle on puisse la comparer. La constante spatiale, il est vrai, est une grandeur, en tant que comparée à des grandeurs empiriquement données dans un espace actuel; si notre espace est non-euclidien, nous pouvons, par exemple, comparer la constante spatiale avec le diamètre de l'orbite terrestre. La constante spatiale, mesurée par cette comparaison, peut avoir une certaine grandeur. Mais c'est seulement par rapport aux grandeurs contenues dans son propre espace que la constante spatiale a une grandeur, et non pas par rapport à d'autres constantes spatiales. On n'a donc pas une série de constantes spatiales plus grandes et plus petites, puisque différentes constantes spatiales appartiennent à différents espaces, dont un seul peut être actuel et dont on ne peut, par suite, comparer deux. Un monde non-euclidien, où la constante spatiale et toutes les lignes et figures seraient subitement majorées dans un rapport constant, ne changerait pas du tout; les lignes, étant mesurées par rapport à la constante spatiale, auraient la même grandeur qu'auparavant, et la constante spatiale elle-même, n'ayant en dehors d'elle aucun étalon de comparaison, serait privée de grandeur, en tant qu'une entre plusieurs constantes spatiales. En d'autres termes, une telle majoration d'un monde non-euclidien est un non-sens; et cela

prouve que la notion de grandeur est inapplicable à l'espace considéré comme un tout.

On pourrait objecter que cela prouve seulement l'absence de différence quantitative entre les différents espaces de constante spatiale positive, ou entre ceux de constante spatiale négative : mais la différence quantitative subsiste, pourrait-on dire, entre les espaces de courbure positive en général et ceux de courbure négative en général, ou entre ces deux classes d'espaces et l'espace euclidien. C'est ce que je nie absolument. Dans les trois genres d'espaces, il n'y a pas d'unité qualitativement semblable qui permette d'effectuer la comparaison quantitative. Les lignes droites d'un espace ne peuvent pas être placées dans un autre; les deux lignes droites dont le produit est l'inverse de la courbure, dans un espace, n'ont pas de courbes correspondantes dans l'autre espace, et partant les courbures respectives ne peuvent pas être quantitativement comparées l'une avec l'autre. Qu'on puisse regarder l'une comme positive et l'autre comme négative, je l'admets, mais leurs valeurs sont indéterminées, et les unités, dans les deux cas, sont qualitativement différentes. Une dette de 300 livres peut être représentée comme un avoir de — 300 livres, et la hauteur de la tour Eiffel est de + 300 mètres; mais il ne s'ensuit pas que les deux sont quantitativement comparables. Il en est de même des constantes spatiales : la constante spatiale est elle-même l'unité pour les grandeurs de son propre espace, et elle diffère qualitativement de la constante spatiale de toute autre sorte d'espace.

Pour passer à un argument plus philosophique, nous pouvons dire encore que deux espaces différents ne peuvent pas coexister dans le même monde; on peut être incapable de décider entre les alternatives de la disjonction, mais elles n'en restent pas moins des alternatives absolument incompatibles. On ne peut donc pas obtenir cette coexistence de deux espaces qui est essentielle à la comparaison. En fait, il semble que, dans son admiration pour Riemann et Helmholtz, Erdmann ait cédé à leur penchant mathématique, et ait admis (comme les mathématiciens tendent naturellement à le faire) que la grandeur est partout et toujours applicable et adéquate, et

qu'elle comporte quelque chose de plus que la simple comparaison de choses dont les qualités sont déjà connues comme semblables [1].

A ce propos [2], il est bon d'appeler l'attention sur une erreur qui, quoique non commise par Erdmann, a une étroite affinité avec l'erreur que nous discutons ici. On a souvent admis que la surface d'une sphère est réellement un plan dans un espace sphérique, ou qu'un grand cercle est une ligne droite sphérique [3]. Pareillement, on admet qu'un espace sphérique à trois dimensions doit être contenu dans un espace euclidien à quatre dimensions. Toutes ces opinions sont complètement fausses. Un *espace* ne peut pas être contenu dans un autre espace; il est nécessairement complet en soi. Quel que soit le nombre de dimensions qu'il possède, il est euclidien ou non-euclidien. S'il est euclidien, on peut y trouver des figures de $(n-1)$ dimensions (n étant le nombre des dimensions de cet espace), ayant des propriétés et des formules semblables à celles d'un espace non-euclidien. De la même manière, s'il est non-euclidien, on peut y tracer des figures de $(n-1)$ dimensions ayant des propriétés et des formules analogues à celles de l'espace euclidien [4]. Mais, pas plus dans un cas que dans l'autre, de telles figures ne doivent être appelées *espaces non-euclidiens* ou *euclidiens*. Car un espace doit, par essence, tout embrasser, et deux espaces ne peuvent coexister. Dans un espace aucune figure ne doit elle-même être appelée *un espace*,

---

(1) La même irréductibilité de l'espace à la pure quantité est prouvée par les exemples, cités par Kant, des deux mains et des triangles sphériques symétriques, dans lesquels subsiste une différence, malgré leur complète égalité quantitative.

(2) Tout ce passage, jusqu'à la fin du paragraphe, a été ajouté par l'auteur.

(3) *Cf.* un article de M. LECHALAS, dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XX (1896), intitulé : *Identité des plans de Riemann et des sphères d'Euclide*, avec une réponse de M. Mansion.

(4) *Cf.* un article de M. A.-N. WHITEHEAD, dans les *Proceedings of the London mathematical Society*, t. XXIX (1898), intitulé : *The geodesic Geometry of surfaces in non-euclidean Space* (*Géométrie géodésique des surfaces dans un espace non-euclidien*).

et une telle figure, malgré la similitude mathématique et symbolique, diffère complètement d'un espace subsistant en soi qui a des formules semblables. Les systèmes euclidien et non-euclidiens sont rigoureusement exclusifs l'un de l'autre : si l'un est vrai, l'autre est faux, et *vice versa*. C'est donc une erreur fondamentale que de regarder les espaces non-euclidiens à trois dimensions comme des figures d'un espace euclidien à plus de dimensions [1], ou d'admettre que deux points dans un seul et même espace peuvent avoir deux distances différentes, l'une mesurée par la droite euclidienne et l'autre par une droite non-euclidienne. Cette erreur est tellement fréquente et si contraire au véritable sens des idées non-euclidiennes, qu'on ne saurait prémunir contre elle avec trop d'insistance.

80. Cela nous amène au quatrième et dernier des points précédemment énumérés, à savoir que, même si l'espace pouvait être à bon droit regardé comme une grandeur, cette manière de l'envisager devrait faire entièrement négliger les *qualités* de l'espace, et que, par conséquent, on ne pourrait obtenir, par cette méthode, aucune de ses propriétés importantes ou essentielles. En effet, regarder l'espace comme une grandeur suppose, nous l'avons vu, qu'on le compare avec quelque chose qui est qualitativement semblable, et qu'on fait abstraction des qualités semblables. Une telle comparaison a été instituée, jusqu'à un certain point et à l'aide de certains arguments douteux, par Riemann et Erdmann; mais en l'instituant, ils ont constamment négligé les qualités communes dont dépend sa possibilité. Or celles-ci sont précisément les propriétés fondamentales de l'espace, celles dont découlent *a priori* les axiomes communs à Euclide et à la Métagéométrie, ainsi que j'essaierai de le prouver dans le Chapitre III. Tels sont les dangers de la tendance des mathématiciens à tout réduire à la quantité.

81. Après avoir protesté contre les postulats initiaux de la

---

(1) Comme, par exemple, dans le titre de l'article de Newcomb dans le *Journal de Crelle*, t. 83. *Voir* p. 11, note 1.

déduction de l'espace d'Erdmann, considérons la manière dont s'effectue cette déduction. Il y aura ici moins de place à la critique, car cette déduction, une fois données ses prémisses, est aussi valable, je crois, que peut l'être une telle déduction. Pour définir l'espace comme une grandeur, dit-il, partons de ses deux propriétés les plus manifestes, la continuité et les trois dimensions. Les sons et les couleurs offrent d'autres exemples de multiplicités qui possèdent ces deux propriétés; mais celles-ci diffèrent de l'espace en ce que leurs dimensions ne sont pas homogènes et permutables. Pour désigner cette différence, Erdmann introduit deux termes assez commodes : dans le cas général, il dit que la multiplicité est *n fois déterminée* (*n-bestimmt*); dans le cas où les dimensions sont homogènes, comme dans l'espace, il dit que la multiplicité est *n fois étendue* (*n-ausgedehnt*). Il appelle les multiplicités de cette dernière espèce des *étendues* (*Ausgedehntheiten*). Il ne paraît pas apercevoir que la différence des deux espèces est une différence de qualité, et non de quantité; il méconnaît également le fait que, dans la seconde espèce, d'après sa définition même, l'axiome de congruence est nécessairement valable, en raison de la similitude qualitative des différentes parties. Néanmoins, il définit l'espace comme une étendue, et il regarde alors la congruence comme empirique, et comme pouvant être fausse dans l'infiniment petit. Cela est d'autant plus étrange, qu'il prouve réellement (p. 50) que la mesure n'est possible, dans une étendue, que si les parties sont indépendantes de leur place, et peuvent être transportées sans déformation pour servir de mesure. Malgré cela, il se met immédiatement à discuter si la courbure est constante ou variable, sans rechercher comment, dans ce dernier cas, la Géométrie pourrait exister. Nous ne pouvons pas savoir, dit-il, par la superposition géométrique, si les corps géométriques sont indépendants du lieu, car si leurs dimensions étaient altérées par le mouvement suivant une loi déterminée, deux corps qui peuvent être superposés dans un lieu pourraient l'être dans n'importe quel autre. Il ne s'aperçoit nulle part qu'une telle hypothèse implique la position absolue et la négation de la similitude qualitative de toutes les parties de l'espace,

qu'il déclare (p. 171) être le principe de sa théorie de la Géométrie. Mais, qui plus est, sa conception de la grandeur comme quelque chose d'absolu, indépendant de la comparaison, l'a empêché de voir qu'une telle hypothèse est absurde. Il dit lui-même que, même dans cette hypothèse, un corps géométrique peut être défini comme un corps dont les points conservent entre eux des distances constantes, car, puisque nous n'avons aucune mesure absolue, la mesure ne peut pas nous révéler le changement de grandeur absolue (p. 60). Mais n'est-ce pas là une réduction à l'absurde? Car la grandeur n'est rien en dehors de la comparaison, et ici, de son propre aveu, la comparaison ne peut s'effectuer que par superposition; si donc, comme dans l'hypothèse précédente, la superposition donne toujours le même résultat, quel que soit le mouvement qui la réalise, c'est un non-sens de parler de grandeurs qui ne seraient plus égales lorsqu'elles sont séparées : une grandeur absolue est une absurdité, et la grandeur qui résulte de la comparaison ne diffère pas de celle qu'on obtiendrait si les dimensions des corps ne changeaient pas pendant le mouvement. Donc, puisque la grandeur n'est intelligible que comme résultat d'une comparaison, les dimensions des corps *restent* invariables dans le mouvement, et l'hypothèse en question est inadmissible. J'aurai à revenir sur ce sujet dans le Chapitre III ([1]).

82. Au surplus, Erdmann n'a pas émis cette hypothèse pour elle-même, mais seulement pour introduire la Mécanique, ce *deus ex machina* de Helmholtz. Car la Mécanique, dit Erdmann avec assurance, prouve que la rigidité doit valoir, non seulement pour les rapports de grandeur, au sens géométrique défini ci-dessus, mais pour les grandeurs absolues (p. 62). C'est ainsi qu'on obtient enfin la vraie congruence, qui est empirique comme la Mécanique, et qu'on ne peut prouver sans le secours de la Mécanique. J'ai déjà critiqué l'opinion de Helmholtz selon laquelle la Géométrie dépend de la Mécanique; je n'ai donc pas besoin ici d'en parler longuement.

([1]) *Voir* §§ 146-147.

Il est regrettable qu'Erdmann n'ait en aucune façon spécifié le procédé par lequel la Mécanique peut décider entre les alternatives géométriques; au fond, il semble s'en rapporter à l'*ipse dixit* de Helmholtz. Si la Géométrie était tout à fait incapable de découvrir un changement de dimensions de l'espèce indiquée, comment les lois du mouvement, qui dépendent entièrement de la mesure, seraient-elles capables de le découvrir, s'il existe? C'est ce que je ne réussis pas à comprendre. Le mouvement rectiligne uniforme, par exemple, présuppose la mesure géométrique; si cette mesure est erronée, ce que la Mécanique croira être un mouvement uniforme n'en sera pas réellement un, mais la Mécanique ne pourra jamais découvrir la différence. Si encore on considérait les lois du mouvement comme *a priori*, la Géométrie aurait pu être confirmée par elles; mais tant que ces lois sont empiriques, elles présupposent la mesure géométrique, et ne peuvent par suite ni les conditionner, ni les affecter.

Erdmann conclut, dans le second Chapitre, que la congruence est probable, mais ne peut pas être vérifiée dans l'infiniment petit; que la vérité de ce principe implique l'existence réelle de corps rigides (bien que, soit dit en passant, nous sachions que de tels corps n'existent pas, rigoureusement parlant), que les corps rigides peuvent se mouvoir librement et ne changent pas de grandeur par la rotation (*Monodromie* de Helmholtz); que l'axiome des trois dimensions est certain, puisque de petites erreurs sur ce nombre sont impossibles; et que les autres axiomes d'Euclide (ceux de la ligne droite et des parallèles) sont vrais, approximativement sinon exactement, de notre espace actuel (p. 78, 83). Il n'examine pas comment, dans cette opinion, la congruence est compatible avec la théorie atomique, ou même avec les déformations observées des corps approximativement rigides; ni comment, si l'espace est homogène, comme il l'admet, les corps rigides pourraient ne pas se mouvoir librement dans l'espace. Tous les axiomes, pris en bloc, sont déclarés empiriques, et l'on voit, dans les Chapitres suivants, qu'Erdmann regarde leur nature empirique comme suffisamment prouvée par le fait qu'ils sont

applicables à une matière empirique (*cf.* p. 159, 165), étrange criterium qui prouverait la même conclusion, avec une égale facilité, à l'égard de l'Arithmétique et des lois de la pensée.

83. Le troisième Chapitre, touchant les conséquences philosophiques de la Métagéométrie, n'a pas besoin d'être discuté tout au long, puisqu'il traite plutôt de l'espace que de la Géométrie. En revanche, il vaut la peine d'examiner brièvement le criterium de l'apriorité d'Erdmann. Il est très difficile de découvrir sa pensée sur ce point, car elle semble varier avec le sujet qu'il discute. Ainsi, à un endroit (p. 147), il rejette très énergiquement la connexion établie par Kant entre l'*a priori* et le subjectif [1], et pourtant, en un autre endroit (p. 96), il regarde toute représentation des choses extérieures comme en partie *a priori* et en partie empirique, simplement parce qu'une telle représentation est due à une action réciproque entre nous et les choses, et est, par suite, due en partie à l'activité subjective, et en partie aux objets extérieurs. Ainsi, dit-il, la distinction n'est pas entre différentes représentations, mais entre différentes faces d'une seule et même représentation. Il semble ici revenir tout à fait au criterium psychologique de la subjectivité, admis par Kant, avec ce désavantage en plus qu'il ruine la valeur de cette distinction, comme de celle de l'analytique et du synthétique, au point de vue épistémologique. Et pourtant il n'hésite jamais à proclamer empirique, tour à tour, tous les éléments de la connaissance. En fait, il semble que, partout où il manque d'un criterium plus logique, il adopte une modification du criterium de Helmholtz relatif aux sensations. Si l'espace est une forme *a priori*, dit-il, aucune expérience ne doit pouvoir le changer (p. 108); mais la Métagéométrie a prouvé qu'il n'en est pas ainsi, puisque nous pouvons avoir l'intuition des perceptions que nous donnerait l'espace

[1] « Toute tentative pour maintenir la doctrine de Kant, qui considère l'apriorité comme le facteur subjectif de la connaissance, absolument indépendant de toute expérience, est donc d'avance condamnée à échouer. »

non-euclidien (p. 115). J'ai critiqué cet argument en discutant Helmholtz; pour le moment, il s'agit du criterium de l'apriorité d'Erdmann. Le criterium de la subjectivité [quoiqu'il l'emploie certainement en discutant l'apriorité de l'espace, et décide solennellement, par son moyen, que l'espace est à la fois *a priori* et empirique, attendu qu'un changement, soit en nous, soit dans le monde extérieur pourrait l'altérer (p. 97)] semblerait, comme plusieurs de ses autres critères, être un lapsus de sa part : le criterium qu'il prétend employer est celui de Helmholtz. Ce criterium pourrait, je crois, être accepté avec un léger changement d'énoncé; il me paraît être une condition nécessaire, mais non suffisante. L'*a priori*, dirions-nous, n'est pas seulement ce qu'aucune expérience ne peut changer, mais ce sans quoi l'expérience serait impossible. D'avoir omis de discuter les conditions qui rendent l'expérience géométrique (et mécanique) possible, c'est là ce qui vicie, à mon avis, les conclusions empiristes de Helmholtz et d'Erdmann. Pourquoi certaines conditions doivent être nécessaires à l'expérience (soit en raison de la constitution de l'esprit, soit pour quelque autre raison), c'est là une autre question, où s'introduit la relation entre l'*a priori* et le subjectif. Mais en discutant la question de savoir quelle connaissance est *a priori*, par opposition à la question concernant les autres conséquences de l'apriorité, il est bon de s'en tenir au criterium purement logique et de conserver ainsi notre indépendance à l'égard des controverses psychologiques. Avec le criterium précédent, la conclusion que certains éléments de la connaissance sont *a priori* ne sera pas infirmée par le fait (si c'en est un) que le monde pourrait défier les tentatives que nous faisons pour le connaître : car les éléments *a priori* restent les conditions nécessaires pour l'existence d'une connaissance en général, que le monde satisfasse ou non à ces conditions.

84. En prenant garde ainsi au sens de l'apriorité, on trouvera, je pense, que les conclusions du Chapitre final d'Erdmann, sur les principes d'une théorie de la Géométrie, sont invalidées, en grande partie, par la diversité et l'insuffisance de ses critères

de l'apriorité. Il commence par affirmer, conformément à la tendance quantitative notée ci-dessus, que la question de la nature des axiomes géométriques est tout à fait analogue à la question correspondante des fondements des Mathématiques pures (p. 138). C'est là, je crois, une erreur radicale : car la fonction des axiomes paraît être d'établir cette base qualitative sur laquelle, nous l'avons vu, toute comparaison quantitative doit reposer. Mais cette base qualitative est étrangère aux Mathématiques pures, car elles traitent de la grandeur pure, c'est-à-dire du résultat purement quantitatif de la comparaison quantitative, partout où elle est possible, indépendamment des qualités qui servent de base à la comparaison. Comme Grassmann l'a montré [1], la Géométrie ne doit pas être classée dans les Mathématiques pures, car elle traite d'une matière qui est donnée à l'entendement, et non créée par lui. Les axiomes fournissent les moyens de soumettre cette matière aux lois de la grandeur, ils ne peuvent donc pas être eux-mêmes déduits de considérations purement quantitatives.

Quoi qu'il en soit, laissons ce point de côté et revenons à Erdmann. Il distingue dans l'espace une forme et une matière ; la forme doit contenir les propriétés communes à toutes les étendues, la matière contient celles qui distinguent l'espace des autres étendues. Cette distinction, dit-il, est purement logique, et ne correspond pas à celle de Kant : pour Erdmann, la matière et la forme sont également empiriques. Les axiomes et les définitions de la Géométrie, dit-il, portent exclusivement sur la matière de l'espace. Il est dommage qu'après avoir fait cette distinction, il en fasse si peu d'usage : il l'abandonne après quelques pages et n'en tire aucune conséquence épistémologique. La raison en est, je crois, qu'Erdmann n'a pas aperçu combien de conséquences peuvent se déduire de sa définition de l'étendue, comme une multiplicité où les dimensions sont homogènes et permutables. Car cette propriété suffit pour prouver l'homogénéité complète d'une étendue et,

---

(1) *Ausdehnungslehre* de 1844. 2e édition, p. XXII-XXIII.

par suite (étant donnée l'absence de différences qualitatives entre les éléments), la relativité de la position et l'axiome de congruence. Cette déduction sera exposée tout au long dans la suite ([1]); pour le moment, je veux seulement remarquer que chaque étendue, dans cette manière de voir, possède toutes les propriétés communes aux espaces euclidien et non-euclidiens, excepté les trois dimensions. Par suite, les axiomes qui expriment ces propriétés s'appliquent à la forme de l'espace et dérivent de l'homogénéité seule, qu'Erdmann admet comme le principe de toute théorie de l'espace (p. 171). La distinction précédente entre la forme et la matière correspond donc, quand on en tire toutes les conséquences, à la distinction entre les axiomes qui dérivent de l'homogénéité de l'espace et ceux qui n'en dérivent pas. Alors, puisque l'homogénéité équivaut à la relativité de la position, et que la relativité de la position est de l'essence même d'une forme d'extériorité, il semble que cette distinction de la forme et de la matière peut aussi être amenée à coïncider avec la distinction de l'*a priori* et de l'empirique en Géométrie. J'aurai à revenir sur ce sujet dans le Chapitre III.

Dans le reste du Chapitre, Erdmann s'efforce de montrer que la ligne droite, etc., quoique n'étant pas tirée par abstraction de l'expérience (laquelle ne présente nulle part de ligne droite), doit pourtant être empirique, attendu qu'elle est applicable à des sciences reconnues empiriques (p. 159). C'est là un critérium qu'il paraît n'employer qu'à défaut de toute autre raison pour établir une thèse empiriste, et qui ne peut évidemment jamais manquer de faire son office, puisque tous les éléments de la connaissance sont susceptibles d'être appliqués à quelque matière empirique. Il définit encore la ligne droite (p. 155) comme une ligne de courbure constante nulle, comme si la courbure pouvait être mesurée indépendamment de la ligne droite. Les axiomes arithmétiques mêmes sont déclarés empiriques (p. 165), attendu que, dans un monde où les choses seraient toutes irrémédiablement différentes les unes des autres,

---

([1]) *Voir* § 129 et suivants.

ces axiomes ne pourraient s'appliquer. Après cette réminiscence de Mill, nous ne sommes pas surpris de trouver, quelques pages plus loin (p. 172), un vague appel aux *logiciens anglais* qui auraient prouvé que la Géométrie est une science inductive. Erdmann déclare, néanmoins, presque à la dernière page de son Livre (p. 173), que la Géométrie se distingue de toutes les autres sciences par l'homogénéité de son objet; principe dont on ne trouve pas une seule application dans tout son Ouvrage, et qui, comme nous le verrons dans le Chapitre III, contredit absolument les théories philosophiques soutenues dans les pages précédentes.

En somme, l'on ne peut pas dire qu'Erdmann ait beaucoup contribué à fortifier la position philosophique de Riemann et de Helmholtz. Je l'ai critiqué tout au long, parce que son Livre a une apparence de grande rigueur systématique et qu'il est incontestablement la meilleure défense qui existe de la thèse qu'il a adoptée. Nous allons avoir maintenant à nous acquitter de la tâche contraire, en défendant la Métagéométrie, sous sa face mathématique, contre les attaques de Lotze et d'autres, et en revendiquant pour elle une portée philosophique dans la mesure (bien inférieure, assurément, aux espérances d'Erdmann) où elle paraît en avoir réellement une.

LOTZE.

85. L'argumentation de Lotze au sujet de la Géométrie [1] (qui suit une discussion métaphysique sur la nature ontologique de l'espace et repose sur les résultats de cette discussion) se divise en deux parties : la première (p. 233-247) discute les divers sens qu'on peut logiquement attribuer à cette proposition, que d'autres espaces que celui d'Euclide sont possibles, et la seconde partie critique, en détail, la méthode de la Métagéométrie. La première de ces questions est très importante et exige qu'on fasse grande attention à la significa-

[1] *Metaphysik*, Livre II, Chap. II (mes citations se réfèrent à l'édition originale).

tion logique du jugement de possibilité. Quoique la discussion de Lotze soit excellente à beaucoup d'égards, je ne puis me persuader qu'il ait découvert le seul vrai sens où des espaces non-euclidiens sont possibles. J'essaierai de justifier cette assertion dans les pages suivantes.

86. Lotze débute par une affirmation quelque peu surprenante qui, bien qu'elle mérite d'être vraie, au point de vue philosophique, ne paraît pas historiquement soutenable. La Géométrie euclidienne, dit-il, a été principalement ébranlée par la théorie kantienne de la nature exclusivement subjective de l'espace : si l'espace est seulement notre forme propre d'intuition, et qu'il n'existe rien d'analogue dans le monde objectif, alors les autres êtres peuvent avoir d'autres espaces, sans que cela suppose aucune différence dans le monde qu'ils rangent dans ces espaces (p. 233). Cela paraît assurément une conséquence légitime de la subjectivité de l'espace, qui, loin d'établir la valeur universelle de la Géométrie euclidienne, n'établit sa valeur qu'après une recherche empirique sur la nature de l'espace, tel que Pierre, Paul ou Jacques en ont l'intuition. Mais, en fait, ceux qui ont le plus contribué à développer la Géométrie non-euclidienne (à l'exception de Riemann, qui était disciple de Herbart) ont ordinairement hérité de Newton un réalisme naïf au sujet de l'espace absolu. Je pourrais donner comme exemple le passage de Bolyaï cité dans le Chapitre I, ou Clifford, qui paraît avoir cette idée que nous voyons réellement les images des choses sur la rétine ([1]), ou encore l'opinion de Helmholtz qui croit que la Géométrie dépend de la manière dont se comportent les corps rigides. Cette croyance conduit à penser que la Géométrie est, comme la Physique, une science expérimentale, où la vérité objective peut sans doute être atteinte, mais seulement par des méthodes empiriques. Toutefois, la raison que Lotze donne de l'incertitude de la Géométrie euclidienne est philosophiquement

---

([1]) Voir *Lectures and Essays*, vol. I, p. 261.

défendable, et il sera instructif d'étudier les diverses possibilités qui en résultent.

Si l'espace (ainsi commence l'argumentation de Lotze) n'est qu'une forme subjective, d'autres êtres peuvent avoir une forme d'intuition différente. Si celle-ci correspond à un monde différent, cette différence, dit-il, n'a pas d'intérêt, car, dans toute discussion métaphysique, il ne s'agit que de notre monde. Mais si cet espace différent correspond au même monde que nous connaissons sous la forme euclidienne, alors on se pose, à son avis, une question d'un intérêt proprement philosophique. Ici il distingue deux cas : ou bien les relations entre les choses qui sont représentées à ces êtres hypothétiques sous la forme d'un espace différent sont des relations qui ne nous apparaissent pas, ou qui, du moins, ne nous apparaissent pas comme spatiales; ou bien ce sont les mêmes relations qui nous apparaissent comme des figures de l'espace euclidien (p. 235). Un exemple de la première possibilité, dit-il, serait le cas d'êtres auxquels les multiplicités des sons et des couleurs paraîtraient étendues; mais nous ne pouvons pas, à son avis, imaginer qu'une multiplicité, comme celle qui est requise pour ce cas, ait ses dimensions homogènes et comparables entre elles, et, par conséquent, le contenu des diverses représentations qui constituent une telle multiplicité ne pourrait pas être combiné en un seul contenu qui les comprenne toutes. Mais la possibilité d'une telle combinaison est de l'essence de toute chose qui mérite le nom d'espace; donc la première des possibilités indiquées est sans motif et sans intérêt. La conclusion de Lotze sur ce point me paraît incontestable, mais je doute que son argument soit bien convaincant. En tout cas, comme cette possibilité n'a aucun rapport avec celle que les non-euclidiens ont considérée, ce n'est pas la peine de la discuter plus longuement.

La seconde possibilité, dans la pensée de Lotze, n'est pas non plus celle de la Métagéométrie, mais en vérité elle s'en rapproche beaucoup plus qu'aucune des autres possibilités examinées. Si un non-euclidien croyait en même temps à la subjectivité de l'espace, il devrait adhérer à cette opinion. Voyons, d'une manière plus précise, en quoi consiste cette opinion. Dans

le Livre II, Chapitre I, Lotze a accepté l'argument de l'esthétique transcendantale, mais il a rejeté celui des antinomies mathématiques; il a décidé que l'espace est subjectif, comme Kant le croyait, mais qu'il possède cependant une contre-partie objective, ce que Kant niait. Le rapport de l'espace représenté à sa contre-partie objective, tel que le conçoit Lotze, est assez difficile à comprendre. Il ne ressemble guère au rapport qui unit la sensation à son objet (par exemple, la lumière aux vibrations de l'éther), car, s'il en était ainsi, l'espace ne serait subjectif dans aucun sens qui le distinguerait des autres perceptions. Il ressemblerait plutôt au rapport d'un mouvement corporel perçu à l'état de conscience de la personne qui veut ce mouvement. Quoi qu'il en soit, on admet que la contre-partie objective de l'espace consiste en certaines interactions immédiates de monades, qui ont conscience de ces actions réciproques comme de modifications de leurs états internes. Il est clair que de telles interactions ne forment pas l'objet de la Géométrie, qui s'occupe seulement des perceptions de figures spatiales qui en résultent pour nous. Or, si la construction de l'espace de Lotze est correcte, il ne paraît certainement y avoir aucune raison pour que ces perceptions résultantes ne puissent pas être très différentes, pour une seule et même action réciproque des monades, en des êtres d'une constitution différente de la nôtre. Mais si ces perceptions étaient différentes, dit Lotze, elles devraient être radicalement différentes; aussi différentes, par exemple, que l'intervalle de deux notes est différent d'une ligne droite. Cette possibilité est donc, à son avis, de telle nature que nous n'en pouvons rien savoir, et qu'elle doit toujours rester une pure idée vide. En quoi il me paraît aller trop loin : car, quelle que puisse être la contre-partie objective, tout argument qui nous en apprend quelque chose doit, quand on le retourne, nous apprendre quelque chose au sujet de toutes les formes d'intuition possibles qui représentent cette contre-partie. L'argument que Lotze a employé dans le précédent Chapitre, par exemple, en déduisant de la relativité de la position la nature purement relationnelle de la contre-partie objective, nous permet, réciproquement, d'inférer

de cette nature relationnelle la complète relativité de la position dans toute intuition possible de l'espace; à moins, sans doute, qu'elle ne soutienne une relation tout à fait trompeuse avec ces interactions de monades qui forment sa contre-partie objective. Mais la complète relativité de la position, ainsi que j'essaierai de l'établir dans le Chapitre III, suffit à prouver que notre Géométrie doit être ou euclidienne, ou elliptique, ou sphérique, ou pseudo-sphérique. Nous sommes donc, semble-t-il, d'après la théorie de l'espace de Lotze, fort bien informés de la manière dont ce qui nous apparaît comme espace *doit* apparaître à d'autres êtres ayant nos lois intellectuelles. Nous ne pouvons pas, il est vrai, savoir quelle théorie *psychologique* de la perception de l'espace s'appliquerait à de tels êtres : ils peuvent avoir un sens différent de tous ceux que nous possédons, ils peuvent même n'avoir aucun sens qui ressemble en quelque manière aux nôtres, mais pourtant leur Géométrie aurait des points de ressemblance avec la nôtre, comme celle des aveugles coïncide avec celle des voyants. En résumé, si l'espace a une contre-partie objective quelconque, et si, comme Lotze le soutient, on peut tirer quelque inférence de l'espace à sa contre-partie, un raisonnement inverse est également possible, quoiqu'il ne puisse donner que quelques-unes des qualités de l'espace euclidien, attendu que quelques-unes seulement de ces qualités peuvent être trouvées avoir un analogue nécessaire dans la contre-partie.

87. Si donc on admet la subjectivité de l'espace, au sens de Lotze, la possibilité en question ne paraît pas aussi creuse qu'il l'imagine. Il se borne pourtant à l'examiner brièvement, pour passer à ce qu'il regarde comme la signification réelle de la Métagéométrie. Ici, il commet une erreur mathématique, qui est la cause de bien des raisonnements qui portent à faux. Il croit, en effet, que la Métagéométrie construit ses espaces avec des lignes droites et des angles semblables à tous égards à ceux d'Euclide; et il s'assure par là une victoire facile, en prouvant que ces éléments ne peuvent être situés que dans le seul espace euclidien. Il a été induit dans cette erreur par le vocabulaire

des non-euclidiens, ainsi que par la distinction établie par Euclide entre les définitions et les axiomes. Car le fait est, évidemment, que les lignes droites ne sont complètement définies que lorsqu'on ajoute à leur définition formelle les axiomes de la ligne droite et des parallèles. Dans l'espace euclidien, la définition d'Euclide suffit, sans doute, à distinguer la ligne droite de toutes les autres courbes; les deux axiomes qui s'y rapportent sont alors absorbés dans la définition de l'espace. Mais quand on ne se restreint pas à l'espace euclidien, la définition doit être complétée par ces deux axiomes, si l'on veut définir entièrement la ligne droite euclidienne. Ainsi Lotze a mal compris la portée des constructions non-euclidiennes, et a tout bonnement méconnu la question en raisonnant comme il fait. Si la possibilité que considèrent les non-euclidiens tombait dans un des cas prévus par Lotze, elle tomberait dans le second cas, discuté ci-dessus.

88. Mais, en réalité, la portée de la Métagéométrie est, je crois, différente de tout ce qu'a imaginé Lotze; et comme peu d'auteurs paraissent voir clair sur ce point, je vais expliquer avec quelque détail la manière dont je la comprends moi-même.

En premier lieu, il y a quelques auteurs (notamment Clifford) (¹) qui, professant un réalisme naïf au sujet de l'espace, soutiennent que notre intuition est jusqu'ici tout à fait insuffisante pour décider de sa nature dans l'infiniment grand ou dans l'infiniment petit : pour ces auteurs, il ne s'agit pas de la possibilité d'êtres différents de nous, mais simplement de l'espace de tous les jours que nous connaissons, et qu'ils étudient dans l'esprit où un chimiste discute si l'hydrogène est un métal, ou un astronome discute l'hypothèse de la nébuleuse.

Mais ceux-là sont une minorité; la plupart, plus circonspects, admettent que notre espace est euclidien aussi loin que s'étend l'observation; ou, s'il n'est pas rigoureusement euclidien, il ne peut qu'être légèrement sphérique ou pseudo-sphérique. Ici encore, c'est l'espace de la vie quotidienne qui est en question;

(¹) Cf. *Essays*, vol. I, p. 320.

de plus, la discussion me paraît être indépendante de toute hypothèse philosophique touchant la nature de notre intuition de l'espace. Car même si celle-ci est purement subjective, la transformation d'une intuition en un concept ne peut s'effectuer que d'une manière approximative, dans les limites des erreurs d'observations inhérentes à l'analyse psychologique; et tant que l'intuition de l'espace n'est pas devenue un concept, on n'obtient pas de Géométrie scientifique. La certitude apodictique de l'axiome des parallèles se réduit à une conviction subjective injustifiée, et s'évanouit tout à fait chez ceux qui entretiennent des doutes non-euclidiens. Pour renforcer la foi euclidienne, il faut alors appeler la raison au secours de l'intuition: mais, malheureusement, la raison nous abandonne, et nous restons à la merci d'observations approximatives de triangles stellaires : piètre soutien, en vérité, pour la religion chérie de notre enfance.

89. Mais la possibilité d'une inexactitude si faible, que nos instruments les plus précis et nos parallaxes les plus écartées ne nous en montrent aucune trace, ne troublerait pas plus l'esprit humain que la chance analogue d'une inexactitude dans la loi de la gravitation, si la possibilité, même la plus faible, dans ce domaine n'avait une importance philosophique. Et c'est la portée philosophique de la Métagéométrie qui seule, je crois, constitue son intérêt réel. Lors même que, comme nous le supposerons pour un instant, l'observation aurait établi, sans aucun doute possible, que notre espace peut être sûrement regardé comme euclidien, la Métagéométrie aurait encore révélé une possibilité philosophique, et, pour cette seule raison, elle pourrait prétendre à peu près, je crois, à toute l'attention qu'elle mérite à présent.

Mais quelle est cette possibilité? Une chose est possible, suivant Bradley (1), lorsqu'elle doit résulter d'un certain nombre de conditions, dont on sait que quelques-unes sont réalisées.

---

(1) *Logic*, p. 187.

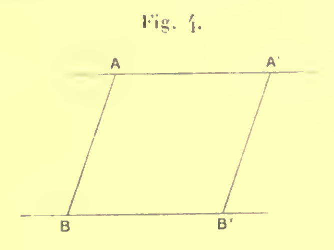
Or les conditions qu'une forme d'extériorité doit remplir pour être admise sont les suivantes : en premier lieu, naturellement, elle doit être donnée dans l'expérience ou légitimement déduite de quelque donnée de l'expérience; mais, en second lieu, elle doit être conforme à certaines conditions logiques, détaillées dans le Chapitre III, et qui peuvent se résumer dans la relativité de la position. Or, ce qui résulte en tout cas de la Métagéométrie, c'est la preuve que la seconde de ces conditions est remplie par les espaces non-euclidiens. Partant, on n'affirme plus la Géométrie euclidienne que pour la raison tirée de l'expérience immédiate, et sa vérité, n'étant pas fondée sur une nécessité logique, est purement assertorique, ou, si l'on préfère, empirique. Tel est le sens le plus important, je crois, où les espaces non-euclidiens sont possibles. Ils servent, en un mot, de matière à une argumentation philosophique plutôt qu'à une recherche de fait : ils jettent de la lumière sur la nature des fondements de la Géométrie euclidienne plutôt que sur la conformation réelle de l'espace (¹). Lotze nie cette importance de la Métagéométrie, pour la raison que la logique non-euclidienne est fautive : raison qu'il s'efforce de justifier par une argumentation longue et détaillée ; avec quel succès, c'est ce que nous allons examiner.

90. L'attaque dirigée par Lotze contre la Métagéométrie (bien qu'elle en reste, à ma connaissance, la meilleure critique de la part de ses adversaires, et que ses arguments fassent désormais partie du répertoire courant des philosophes euclidiens) contient, si je ne me trompe, plusieurs contre-sens dus à une insuffisante connaissance mathématique du sujet. Comme ces contresens ont été largement répandus parmi les philosophes, et qu'ils ne peuvent pas être facilement réfutés par un critique qui n'aurait pas étudié la Géométrie non-euclidienne avec quelque soin, il semble désirable de discuter les objections de Lotze point par point.

(¹) Sur la signification de la possibilité géométrique, *cf.* VERONESE, *Grundzüge der Geometrie* (traduction allemande), p. XI-XIII.

91. La critique mathématique commence (§ 131) par une définition des parallèles qui est, en quelque sorte, une pétition de principe. Voici, d'après cette définition, à quelle condition deux droites AA′, BB′ seront parallèles : Soient A et B (*fig.* 4)

Fig. 4.



deux points pris arbitrairement sur ces deux droites; si l'on prend respectivement sur chacune d'elles deux autres points A′, B′ tels que $AA' = BB'$, on doit avoir aussi $AB = A'B'$. Cette définition, qui contient l'axiome et la définition d'Euclide combinés sous une forme très commode et très séduisante, est naturellement tout à fait appropriée à la Géométrie euclidienne, et conduit immédiatement à toutes les propositions euclidiennes sur les parallèles. Mais il est peut-être plus loyal de suivre la marche d'Euclide; lorsqu'on a ainsi enterré un axiome dans une définition, on peut croire qu'on a surmonté la difficulté, parce que les définitions sont réputées arbitraires, tandis que, en réalité, la possibilité des parallèles, définies comme ci-dessus, implique justement le point en question, à savoir l'axiome contesté des parallèles. En effet, ce que cet axiome affirme, c'est tout bonnement l'existence de lignes conformes à la définition de Lotze. La démonstration des principales propositions relatives aux parallèles, dont Lotze fait suivre cette définition, est naturellement une déduction très simple, mais une déduction dont les prémisses postulent ce qui est en question.

92. L'argument suivant en faveur de l'apriorité de la Géométrie euclidienne a, chose assez curieuse, une portée exactement contraire, bien qu'il soit l'argument favori des adversaires de la Métagéométrie. Les mesures de triangles stellaires

et toutes les tentatives semblables pour déterminer empiriquement la constante spatiale manquent le but, d'après Lotze; car toutes les fois que l'on observerait un triangle dont la somme des angles s'écarte de deux angles droits, ou une parallaxe annuelle finie pour des étoiles éloignées, on attribuerait ce fait à une nouvelle espèce de réfraction, ou, comme dans le cas de l'aberration, à quelque autre cause physique, et jamais à la nature géométrique de l'espace. C'est là un argument puissant en faveur de la valeur empirique de la Géométrie euclidienne, mais, comme argument en faveur de la certitude apodictique du système orthodoxe, il a une tendance toute contraire. En effet, des observations de ce genre pourraient être dues au fait, inconnu jusqu'ici, que les rayons lumineux stellaires s'écartent de la rectitude euclidienne. Un tel écart pourrait, en certains cas, s'expliquer par une constante spatiale finie, mais il pourrait probablement aussi s'expliquer par un changement dans l'Optique, par exemple, en attribuant des propriétés réfringentes à l'éther. De telles propriétés ne pourraient exister que si l'éther était de densité variable, par exemple si l'éther était plus dense dans le voisinage de certains corps célestes. Mais une telle supposition ruinerait, je crois, l'utilité de l'éther pour la Physique; il est donc probable qu'une légère altération dans notre Géométrie, assez faible pour ne pas affecter les distances d'une manière appréciable à l'intérieur du système solaire, serait, en fin de compte, une explication plus simple que toutes celles que la Physique pourrait offrir, si jamais de telles erreurs venaient à être découvertes. Mais ce n'est pas là le point que je tiens à établir. Ce point consiste en ceci que, si l'explication physique est possible dans le cas précité, comme Lotze le soutient, la réciproque doit être également valable : on doit pouvoir expliquer les phénomènes actuels en supposant l'éther réfringent et l'espace non-euclidien. Il n'y a pas moyen d'échapper à cette conclusion. Si l'on peut expliquer, dans la Géométrie euclidienne, toute trajectoire concevable des rayons lumineux par des causes physiques, on doit aussi pouvoir, par un choix convenable de causes physiques hypothétiques, expliquer les phénomènes actuels comme appartenant à un espace non-

euclidien. Une telle hypothèse serait à bon droit rejetée par la Science, pour le moment, en raison de son inutile complexité. Elle reste, néanmoins, une possibilité avec laquelle la Philosophie doit compter, et le choix ne peut être fixé que par des raisons empiriques de simplicité. Il est permis de douter que, dans le monde que nous connaissons, les phénomènes puissent être attribués à un espace franchement non-euclidien, mais cette conclusion dérive inévitablement de cette affirmation, qu'il n'y a pas de phénomènes qui puissent nous forcer à admettre un tel espace. Ainsi l'argument de Lotze, quand on le pousse à bout, réfute sa propre thèse et réduit l'espace euclidien à n'être qu'une explication empirique des phénomènes, au même titre que l'éther luminifère [1].

93. Lotze passe alors (§ 132) à une critique détaillée de Helmholtz, qu'il regarde comme un représentant typique de la Métagéométrie. Il se peut que Helmholtz ait réellement joué ce rôle au temps où Lotze écrivait; mais il est fâcheux que, dans l'esprit des philosophes, il continue à le jouer, après les progrès très importants que la Géométrie projective a apportés dans la manière de traiter le sujet. Il est également fâcheux qu'on ait eu si souvent recours à ses essais, un peu négligés, de vulgarisation des résultats mathématiques, au lieu de prêter à ses travaux plus techniques et plus solides l'attention qui leur est due. C'est ainsi qu'on s'est attaqué à ses romans sur le Pays Plat et le Pays Sphérique (qui ne sont, à tout prendre, que des analogies de contes de fées, d'une valeur douteuse), comme s'ils constituaient un élément essentiel de la Métagéométrie.

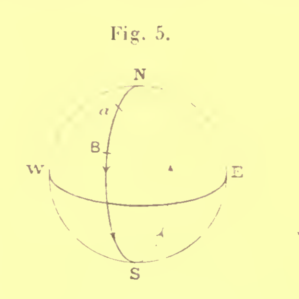
Mais arrivons aux détails : Lotze accorde sans difficulté que les habitants du Pays Plat constitueraient la Géométrie plane, telle que nous la connaissons, mais il refuse d'admettre que les habitants du Pays Sphérique pussent, sans inférer la troisième

(1) *Cf.* Calinon, *Sur l'Indétermination géométrique de l'Univers*, ap. *Revue philosophique*, vol. XXXVI, p. 595-607; 1893.

dimension, constituer une Géométrie sphérique à deux dimensions exempte de contradictions. Je vais essayer de donner une traduction libre du raisonnement de Lotze sur ce point.

Supposons, dit-il, un pôle nord et un pôle sud, N et S, arbitrairement fixés, et un équateur EW (*fig.* 5). Supposons qu'un être, B, qui ne peut recevoir d'impressions que des

Fig. 5.



objets situés à la surface de la sphère, se déplace sur le méridien NBS; que B parte d'un certain point a, et que, après avoir décrit un grand cercle, il revienne finalement au même point a. S'il ne connaît le point a que par la qualité de l'impression qu'il en reçoit, B peut s'imaginer qu'il n'a pas retrouvé le même point a, mais un autre point semblable a', présentant avec a une relation analogue à celle de l'octave en musique : il peut même ne pas ranger du tout ses impressions sous forme spatiale. Pour qu'il en puisse être ainsi, il faut faire cette nouvelle hypothèse, que toute différence entre les sensations mentionnées ci-dessus (pendant que B décrit le méridien) peut être représentée comme une distance spatiale entre deux positions. Même alors, B peut croire qu'il décrit une ligne droite euclidienne contenant des points semblables à certains intervalles. En admettant, cependant, qu'il conçoive l'identité de a avec sa position initiale, il lui semblera maintenant être revenu, en se mouvant sur une ligne droite, au point dont il était parti, car, sans la troisième dimension, ce mouvement ne peut pas lui paraître autrement que rectiligne.

Jusqu'ici, il semble qu'il n'y ait guère matière à objection, excepté peut-être l'idée de la ligne droite avec points périodiquement semblables; si B était aussi philosophe qu'on le suppose

d'ordinaire dans ces discussions, il objecterait probablement, à cette manière d'interpréter son expérience, qu'il lui faudrait regarder l'espace vide comme quelque chose d'indépendant des objets qu'il renferme. Il est bon de montrer aussi que B n'aurait pas besoin de décrire le cercle tout entier de manière à se retrouver subitement chez lui avec ses vieux amis. Des mesures précises de petits triangles lui suffiraient pour déterminer la constante spatiale, et lui apprendraient la longueur d'un grand cercle (ou d'une ligne droite, comme il l'appellerait). Il faut admettre aussi qu'un être aussi hypothétique que B pourrait n'avoir aucune intuition de l'espace, mais, puisqu'il n'a été introduit que pour les besoins de l'analogie, il convient de lui accorder toutes les qualités possibles en vue de son office. Mais ces difficultés n'atteignent pas le nerf de l'argument, qui consiste dans l'affirmation qu'une telle ligne droite, qui revient sur elle-même après un temps fini, apparaîtrait à B comme une « insupportable contradiction », et l'obligerait ainsi à admettre une troisième dimension, non pas pour les besoins de la sensation, mais pour ceux de la logique. Cette assertion me semble tout à fait injustifiée : l'ensemble de la Métagéométrie est une machine de guerre qui suffit à la battre en brèche. Il faut se rappeler que l'argument de Helmholtz n'est qu'une analogie, et que la contradiction n'existerait *que* pour un euclidien. On a pu développer une Géométrie complète à *trois* dimensions (nous l'avons vu dans le Chapitre I) en admettant que les lignes droites ont une longueur finie. Une valeur *constante* de la courbure de l'espace n'implique, ainsi que l'a montré notre discussion de Riemann, aucune référence à la quatrième dimension, ni aucune espèce de contradiction interne. Ce fait réfute la thèse de Lotze, qui provient uniquement de son impuissance à dépouiller son imagination des idées euclidiennes.

Lotze critique ensuite Helmholtz pour avoir affirmé que B ne pourrait jamais connaître des lignes parallèles (il veut dire, comme le contexte le montre, des *droites* parallèles) [1]. Mais

[1] *Vorträge und Reden*, vol. II, p. 9 : « Les habitants de la sphère ne connaîtraient pas de lignes parallèles. Ils affirmeraient que deux lignes *droites*

Lotze prend manifestement ces mots comme s'ils signifiaient simplement des courbes équidistantes d'une droite donnée; or de telles lignes font partie du répertoire courant de la Métagéométrie. Les parallèles de latitude, au sens géographique, n'apparaîtraient pas à B comme des lignes droites, mais comme des cercles (à l'exception de l'équateur). Ce sont les *grands* cercles qu'il appellerait des lignes droites, et ce fait semble avoir induit Lotze à penser à tort que tous les cercles devraient être traités comme des lignes droites. Par conséquent, les parallèles de latitude, bien que B pût les appeler *parallèles,* n'infirmeraient pas les conclusions de Helmholtz, qui s'appliquent seulement aux lignes droites.

L'argument que nous venons d'écarter, suivant lequel des petits cercles seraient des parallèles, n'est que la préface d'un second, qui tend à prouver que B aurait besoin d'une troisième dimension. Appelons l_n et l_s deux de ces parallèles de latitude, et supposons-les équidistants de l'équateur, l'un dans l'hémisphère nord et l'autre dans l'hémisphère sud. Des plans tangents (¹) consécutifs, le long de ces parallèles, convergent dans un cas du côté du nord, dans l'autre du côté du sud. Ou bien B peut s'apercevoir de leur différence, dit Lotze, ou bien il ne le peut pas. Dans le premier cas, qu'il regarde comme le plus probable, il prouve aisément que B en inférerait la troisième dimension. Mais cette alternative est absolument inadmissible, à mon avis. Des plans tangents, comme des plans euclidiens en général, n'auraient aucun sens pour B; à moins, pourtant, qu'il ne fût un métagéomètre, ce que le raisonnement, malgré toute la subtilité métaphysique et mathématique qu'on accorde à B, n'admet pas; et à une telle supposition Lotze est assurément le dernier qui eût le droit de faire quelque objection. Le raisonnement par lequel Lotze a essayé de prouver que c'est là la véritable alternative repose, si je le comprends bien, sur une

---

quelconques, suffisamment prolongées, doivent se couper, non seulement en un point, mais en deux. » (Les italiques sont de moi.) L'omission de *droites* dans de telles phrases est une négligence fréquente chez les mathématiciens.

(¹) A la sphère. (*Note du trad.*)

erreur flagrante en Géométrie sphérique ordinaire. B observerait, dit-il, que les méridiens font avec son chemin ([1]) des angles plus petits du côté du pôle le plus rapproché que du côté du pôle le plus éloigné, tandis qu'en fait les méridiens sont tout bonnement perpendiculaires à son chemin dans les deux directions. Ce que Lotze veut sans doute dire, c'est que tous les méridiens se rencontrent plus tôt dans une direction que dans l'autre, et cela est évidemment vrai. Mais les pôles, où se rencontrent les méridiens, paraîtraient à B comme les centres des parallèles respectifs, alors que les parallèles eux-mêmes lui paraîtraient être des cercles. Et je ne réussis pas à voir quelle difficulté B éprouverait à admettre que deux cercles différents ont des centres différents ([2]). Il faut donc adopter la seconde alternative, savoir que B n'aurait aucune espèce de connaissance du sens dans lequel convergent les plans tangents. Ici Lotze essaie, si je l'ai bien compris, d'une démonstration par l'absurde : B croirait, dit-il, qu'il a décrit deux chemins exactement les mêmes en direction, et alors il *pourrait* les regarder tous deux comme des cercles dans un plan. On peut remarquer que la direction, appliquée à un cercle considéré comme un tout, n'a aucun sens; en fait, dans toute la Métagéométrie, la direction, même lorsqu'elle est appliquée aux lignes droites, ne peut signifier que direction vers un point. Parler de deux lignes qui ne se rencontrent pas comme ayant la même direction, c'est introduire subrepticement l'axiome des parallèles. A part cela, je ne puis concevoir aucune objection que B puisse faire à cette thèse. (Il ne *pourrait* pas seulement, mais il *devrait* regarder les deux chemins comme des cercles dans un même plan.) Toute cette argumentation, à moins que son obscurité ne m'ait égaré, doit donc être déclarée infructueuse et non concluante.

94. Après cette discussion préliminaire sur le pays sphérique,

---

([1]) C'est-à-dire avec le parallèle que B est censé décrire.

(*Note de M. L. C.*

([2]) On m'a suggéré que Lotze regarde les méridiens comme projetés sur

Lotze passe à la question d'une quatrième dimension, et ensuite à celle de l'espace sphérique et pseudo-sphérique. Comme précédemment, il ne paraît connaître que les exposés plutôt négligés et populaires de Helmholtz et de Riemann, et n'avoir pris aucune peine pour comprendre même les fondements mathématiques de la Métagéométrie. Cette lacune enlève toute valeur à beaucoup de ses assertions. Et d'abord, il croit que le conte de fée de Helmholtz avait pour but de suggérer la possibilité d'une quatrième dimension, alors que le but réel était exactement l'opposé, à savoir de rendre intelligible un espace non-euclidien à trois dimensions seulement. Helmholtz n'a introduit le pays plat que parce que son rapport au pays sphérique est analogue au rapport de notre espace à l'espace sphérique ([1]). Mais Lotze dit : Les habitants du pays plat n'éprouveraient aucune difficulté à admettre une troisième dimension, puisqu'elle ne contredirait en rien leur propre Géométrie, tandis que les gens du pays sphérique auraient déjà été conduits à l'admettre par les contradictions de leur système à deux dimensions. J'ai déjà essayé de répondre à cette dernière assertion ; la première sonne faux, vu la tentative que fait l'auteur, quelques pages plus loin, pour prouver *a priori* que toutes les formes de l'intuition qui sont en quelque manière analogues à l'espace *doivent* avoir trois dimensions. On ne peut s'empêcher de présumer que les habitants du pays plat, qui n'ont que deux dimensions au lieu de trois, feraient une tentative semblable. Mais, pour revenir au raisonnement de Lotze : On ne peut non plus invoquer l'analogie, dit-il, pour prouver que nous devrions peut-être admettre une quatrième

---

un plan, comme dans une carte géographique. S'il en était ainsi, ce serait là une introduction manifestement illégitime de la troisième dimension.

([1]) Cela est prouvé par la remarque de Helmholtz à la fin du passage détaillé où il essaie de rendre imaginables les espaces sphériques et pseudo-sphériques (*l. c.*, p. 28) : « Il en va autrement des trois dimensions de l'espace. Comme tous nos moyens d'intuition sensible n'atteignent qu'un espace à trois dimensions, et que la quatrième dimension n'est pas seulement une modification de l'espace présent, mais quelque chose d'entièrement nouveau, nous nous trouvons dès lors, par suite de notre organisation corporelle, dans l'impossibilité absolue de nous représenter un mode d'intuition d'une quatrième dimension. »

dimension, puisque, pour nous, il n'existe pas de contradiction ni de phénomènes inexplicables d'une autre manière. Les seules personnes qui, à ma connaissance, aient invoqué cette analogie sont le Dr Abbot (1) et quelques spiritistes (2), le premier par plaisanterie, et les autres pour expliquer certains phénomènes que Maskelyne et Cooke (3) ont expliqués peut-être plus simplement. Mais bien que Lotze arrive sur ce point à une conclusion valable, et que Helmholtz aurait acceptée, ses arguments, à mon avis, ne portent pas et ne sont pas convaincants. Voici, dit-il, la différence entre nous et les habitants du pays sphérique : ceux-ci seraient logiquement forcés d'admettre une nouvelle dimension, et la trouvent possible ; tandis que nous n'y sommes pas forcés, et que nous la trouvons impossible dans notre espace. J'ai soutenu que, au contraire, rien ne forcerait les habitants du pays sphérique à supposer une troisième dimension, attendu qu'ils la trouveraient impossible, exactement comme nous trouvons impossible une quatrième dimension; j'entends non pas impossible au point de vue logique, mais impossible seulement comme construction représentable dans l'espace donné.

Après une plaisanterie quelque peu éléphantesque sur des baleines socialistes dans une mer à quatre dimensions remplie d'*eau sucrée* (4) de Fourier, Lotze entreprend de prouver, par la logique, que toute forme d'intuition qui embrasse le système entier des relations ordonnées d'une multiplicité coexistante *doit* avoir trois dimensions. On pourrait s'opposer à toute tentative de ce genre pour des raisons *a priori* : ce qui appartient à l'intuition pure ne peut guère, semble-t-il, être déterminé par

---

(1) Auteur d'un roman intitulé *Flatland* (pays plat).
(*Note de l'auteur.*)

(2) *Spiritualists*, dans le texte. Nous traduisons par *Spiritistes* au lieu de *Spirites*, pour nous conformer à l'étymologie (*Spiritus* = esprit).
(*Note du trad.*)

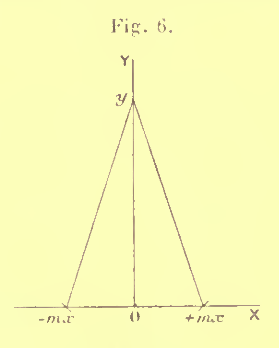
(3) Ce sont deux prestidigitateurs qui ont répété les expériences des spiritistes, et qui ont ainsi expliqué certains phénomènes prétendus surnaturels par la Physique... amusante. (*Note du trad.*)

(4) En français dans le texte. (*Note du trad.*)

un raisonnement *a priori* (¹). Mais je ne développerai pas ici cet argument; j'essaierai seulement de montrer le vice particulier de cette démonstration, autant que le permettra son obscurité.

Lotze raisonne comme suit. Dans cette discussion, bien que notre terminologie soit nécessairement empruntée à l'espace, nous avons affaire, en réalité, à une notion beaucoup plus générale. Afin de conserver l'homogénéité des dimensions, nous supposons que la différence (distance) entre deux éléments (points) quelconques de notre multiplicité (pour employer le terme de Riemann) est de la même espèce que la différence entre deux autres éléments quelconques, et commensurable avec elle. Prenons une série d'éléments à des distances successives x, et tels que la distance entre deux quelconques soit la somme des distances entre les éléments intermédiaires. Une telle série correspond à une ligne droite, que l'on prend pour axe des x. Alors une série OY sera dite perpendiculaire à l'axe des x, OX, si les distances de chaque élément y, sur OY, à $+mx$ et à $-mx$ sont égales. Par hypothèse, ces distances sont comparables, et qualitativement semblables, à x et à y. Tant que OY n'est définie que par sa relation à OX, elle

Fig. 6.



est conceptuellement unique. Mais supposons maintenant que la même relation qui existe entre OX et OY soit possible entre OY et une nouvelle série OZ; nous obtenons alors une troisième série OZ, perpendiculaire à OY, et encore conceptuellement unique, tant qu'elle est définie par sa relation à OY seule. Nous

(¹) *Cf.* GRASSMANN, *Ausdehnungslehre* de 1844, 2ᵉ éd., p. XXIII.

pourrions concevoir, de la même manière, une quatrième ligne OU perpendiculaire à OZ. Mais il est nécessaire, pour notre dessein, que OZ soit perpendiculaire à OX aussi bien qu'à OY. Sans cette condition, OZ pourrait s'étendre dans un autre monde, et n'avoir aucune relation correspondante avec OX : c'est là une possibilité qui n'est exclue que par nos images spatiales inéluctables. Dans le point suivant gît le nœud de l'argument. *Cet axe* OZ, dit Lotze, qui, tout en étant perpendiculaire à OY, est aussi perpendiculaire à OX, doit faire partie de la série des OY, car ceux-ci ne sont définis que par leur perpendicularité à OX. *Par conséquent*, conclut-il, il ne peut y avoir tout au plus une troisième dimension que si OZ coïncide avec un des éléments de la série des OY ; et même, du moment que OX est considéré comme fixe, OZ ne pourra coïncider qu'avec *un seul* de ces éléments.

Il est difficile (à moi du moins) d'accorder une valeur quelconque à ce raisonnement. La seule manière dont je puisse me l'expliquer est d'admettre que Lotze a méconnu la possibilité de toute infinité autre que l'infinité simple ([1]). Dans cette interprétation, l'argument peut être exposé comme il suit : Il y a une série infinie d'axes OY variables d'une manière continue ; à leur propriété commune ([2]) nous en ajoutons une autre ([3]), qui divise leur nombre total par l'infini. L'axe restant OZ doit donc être déterminé d'une manière unique. Mais on prouverait, par des arguments du même genre, que deux surfaces ne peuvent se couper qu'en un seul point, et une infinité d'autres absurdités. En réalité, il peut y avoir des infinis de différents ordres. Par exemple, le nombre des points dans une ligne peut être pris comme une infinité simple, et de même le nombre des lignes qui dans un plan passent par un point quelconque ; alors, par multiplication, on trouve que le nombre des points d'un plan est une infinité double, ∞^2, et si l'on divise ce nombre par

---

([1]) A savoir des infinités doubles, triples, etc. (infinis d'infinis).

([2]) A savoir d'être perpendiculaires à OX.

([3]) A savoir d'être perpendiculaires à un OY (axe fixe).

(Ces trois Notes sont de M. Couturat.)

une infinité simple, il reste encore un nombre infini de points. Ainsi le raisonnement de Lotze suppose ce qu'il doit prouver, à savoir que le nombre des lignes perpendiculaires à une ligne donnée, en un point quelconque, est une infinité simple, ce qui équivaut à l'axiome des trois dimensions. Le passage tout entier est si obscur, que sa signification peut m'avoir échappé. En tout cas, il est évident *a priori*, comme je l'ai montré en commençant, que toute démonstration de cet axiome doit contenir quelque paralogisme; mais l'interprétation que je viens de donner de cet argument est la seule que j'aie pu trouver.

95. Le reste du Chapitre est consacré à une critique des espaces sphérique et pseudo-sphérique, sous prétexte qu'ils sont incompatibles avec l'homogénéité des trois dimensions et avec la similitude de toutes les parties de l'espace. Cela est tout bonnement faux. De tels espaces *sont* partout absolument identiques à eux-mêmes, comme la surface d'une sphère. Lotze montre, ici et ailleurs, qu'il n'a pas pris la peine de se rendre compte de ce qu'est réellement la Métagéométrie. Je pense moi-même (et j'ai cherché à le prouver dans cet Essai) que la congruence est un axiome *a priori*, sans lequel la Géométrie serait impossible; mais le désir de maintenir cet axiome est précisément, Lotze aurait dû le savoir, le motif qui a amené la Métagéométrie à se restreindre aux espaces à courbure constante. Nous voyons ici combien il importait de distinguer Helmholtz le philosophe et Helmholtz le mathématicien. Tandis que le philosophe désirait se passer de la congruence, le mathématicien la retenait et y insistait avec force, comme nous l'avons vu dans le Chapitre I. Un peu plus loin, Lotze montre encore à quel point il a été égaré par la malencontreuse analogie du pays sphérique. On peut comprendre, dit-il, une *surface* sphérique; mais comment peut-on passer de celle-ci à un espace sphérique? Ou bien cette surface est la totalité de notre espace, comme dans le pays sphérique, ou bien elle engendre l'espace par le fait que son rayon va croissant graduellement. Or cet ensemble de sphères concentriques, Lotze le montre triomphalement, engendre

naturellement l'espace euclidien. Mais son dilemme est complètement et entièrement faux, et n'aurait jamais pu venir à l'esprit de quelqu'un qui aurait eu même une connaissance superficielle de la Métagéométrie. Cet argument est moins élaboré que le premier, qui se trouve répété, dans toute sa nudité, dans la dernière phrase du Chapitre : « Je ne puis me persuader qu'on puisse, sans les éléments de l'espace homogène, former ou définir seulement la représentation d'espaces hétérogènes, ou d'espaces qui auraient une courbure variable. » Comme si de tels espaces avaient jamais été admis par la Géométrie non-euclidienne!

Pour conclure, Lotze exprime l'espoir que la Philosophie ne se laissera pas imposer sur ce point par les Mathématiques. Il faut, au contraire, se réjouir de ce que les Mathématiques ne se soient pas laissé imposer par la Philosophie, et qu'elles aient développé librement un système important et conséquent avec lui-même, qui mérite, pour sa subtile analyse des éléments logiques et de fait, la gratitude de tous ceux qui cherchent une philosophie de l'espace.

96. Les objections faites à la Géométrie non-euclidienne que nous venons de discuter se ramènent à quatre chefs :

I. Les espaces non-euclidiens ne sont pas homogènes; la Métagéométrie réalise donc indûment l'espace [1].

II. Ils impliquent une référence à la quatrième dimension.

III. Ils ne peuvent pas se construire sans une référence implicite à l'espace euclidien, ou à la droite euclidienne; donc ils en dépendent.

IV. Ils sont contradictoires d'une ou de plusieurs manières.

Le lecteur qui aura reconnu, avec moi, que ces quatre objections sont mal fondées, n'aura aucune difficulté à écarter n'importe quelle autre critique adressée à la Métagéométrie, attendu que ce sont là, à ma connaissance, les seuls arguments mathématiques qui aient jamais été dirigés contre les non-

[1] C'est-à-dire fait de l'espace une chose réelle. (*Note de M. Couturat.*)

euclidiens [1]. La validité logique de la Métagéométrie et la possibilité mathématique des espaces non-euclidiens à trois dimensions seront donc regardées, dans tout le reste de l'Ouvrage, comme suffisamment établies.

97. On peut bien encore opposer deux autres objections à la Métagéométrie, mais elles ont plutôt une portée philosophique que strictement mathématique. La première, que Delbœuf a prise pour base d'opérations, s'applique indifféremment à tous les espaces non-euclidiens. La seconde, qui, à ma connaissance, n'a pas été souvent employée mais qui pourtant me paraît mériter une mention, porte directement contre les espaces de courbure positive seuls; mais si elle pouvait les ruiner, elle jetterait un doute sur la méthode par laquelle on a obtenu en même temps tous les autres. Ces deux objections sont :

I. L'espace doit être de nature à permettre la similitude, c'est-à-dire l'augmentation ou la diminution, dans un rapport constant, de toutes les lignes d'une figure, sans changer les angles; tandis que, dans la Géométrie non-euclidienne, les lignes, comme les angles, ont une grandeur absolue.

II. L'espace doit être infini, tandis que les espaces sphérique et elliptique sont finis.

Je discuterai la première objection en même temps que les articles de Delbœuf mentionnés ci-dessus. La seconde, qui, à ma connaissance, n'a pas beaucoup servi aux critiques, sera mieux à sa place dans le Chapitre III.

DELBŒUF.

98. Les quatre articles de Delbœuf dans la *Revue philosophique* contiennent beaucoup de choses qui ont déjà été

(1) *Voir* spécialement STALLO, *La Matière et la Physique moderne* (*Bibliothèque scientifique internationale*, Alcan, Chap. XIII et XIV); RENOUVIER, *Philosophie de la règle et du compas* (*Année philosophique*, t. II, 1891); DELBŒUF, *L'ancienne et les nouvelles géométries* (*Revue philosophique*, t. XXXVI-XXXIX).

traitées dans notre critique de Lotze, et beaucoup d'autres qui sont étrangères à notre sujet présent. Le seul point que je veuille discuter ici est la question de la grandeur absolue, comme il l'appelle, c'est-à-dire la question de savoir si la possibilité de figures géométriques semblables, mais inégales, peut être connue *a priori* (1).

En discutant cette question, il importe, tout d'abord, de distinguer clairement le sens dans lequel la grandeur absolue *est* requise en Géométrie non-euclidienne, d'un autre sens dans lequel il serait absurde de regarder une grandeur quelconque comme absolue. Les jugements de grandeur ne peuvent résulter que de la comparaison, et si la Métagéométrie exigeait des grandeurs qui pussent être déterminées sans comparaison, elle mériterait certainement d'être condamnée. Mais il n'en est pas ainsi. Tout ce qu'elle postule, c'est qu'il soit impossible, sans altérer le reste de l'espace, de changer la grandeur d'une figure quelconque, par rapport à d'autres figures, tout en laissant invariables les grandeurs relatives internes de ses parties. Cette construction, qui est possible en Géométrie euclidienne, est impossible en Métagéométrie. Nous avons à examiner si, par une telle impossibilité, les espaces non-euclidiens sont entachés d'un vice logique.

L'opinion de Delbœuf sur cet axiome (qu'il appelle le *postulat de l'homogénéité*) (2) est que toute Géométrie le présuppose nécessairement, et que, en conséquence, la Métagéométrie, quoique logiquement valable, dépend logiquement de la Géométrie euclidienne, et ne peut effectuer ses constructions que dans un espace euclidien « homogène » (3). Il paraît

(1) Delbœuf a eu le mérite de fonder, dès 1860, dans ses *Prolégomènes philosophiques de la Géométrie*, la Géométrie euclidienne sur cet axiome, qui est assurément, à première vue, un meilleur fondement que l'axiome des parallèles.

(2) Il ne faut pas confondre ce sens de l'homogénéité avec le sens que j'ai donné à ce mot. Dans le sens de Delbœuf, il signifie que les figures peuvent être semblables, quoique de différentes grandeurs; dans mon sens, il signifie que les figures peuvent être égales, quoique en des lieux différents. Cette dernière propriété de l'espace est appelée par Delbœuf *isogénéité*.

(3) *Revue philosophique*, t. XXXVII, p. 380-381.

croire, néanmoins, que l'homogénéité (prise dans son sens) est une donnée de l'expérience, bien qu'il ne soit pas très explicite sur ce point (¹). En tout cas, on n'en trouve, dans ses articles, aucune preuve *a priori*. On sait par expérience, chacun l'admettra, que la similitude est possible dans les limites de l'observation; mais le fait que cette possibilité s'étend aux cartes de l'État-Major, qui pourtant représentent une surface sphérique, devrait nous faire prendre garde d'induire de cette donnée la certitude de la Géométrie euclidienne pour les figures de grandes dimensions. D'ailleurs, si l'homogénéité est empirique, la Métagéométrie, qui s'en passe, n'est pas nécessairement dans une dépendance *logique* à l'égard d'Euclide, puisque l'homogénéité et l'isogénéité sont *logiquement* séparables. Je supposerai donc, comme la seule thèse qui puisse intéresser notre raisonnement, que l'homogénéité est regardée comme *a priori*, et comme logiquement essentielle à la Géométrie.

99. Nous avons vu, en discutant les idées d'Erdmann sur le jugement de grandeur, que, dans l'espace non-euclidien comme dans l'espace euclidien, une variation de toutes les quantités spatiales, dans le même rapport, ne serait pas un changement du tout; les rapports de toutes les grandeurs à la constante spatiale resteraient invariables, et la constante spatiale, en tant qu'étalon ultime de comparaison, ne peut avoir aucune grandeur, excepté par comparaison avec les autres grandeurs de son propre espace. Les grandeurs absolues de la Métagéométrie ne sont donc absolues que par rapport à une autre grandeur *particulière*, et non par rapport à d'autres grandeurs en général. S'il n'en était pas ainsi, cela contredirait la nature comparative du jugement de grandeur, et la Métagéométrie métrique deviendrait absurde. Mais, telle qu'elle est, elle ne diffère de la Géométrie euclidienne qu'en ceci : En Métagéométrie nous avons (ce que nous n'avons pas dans Euclide) un étalon de comparaison impliqué dans la nature de notre espace

(¹) Voir *Revue philosophique*, t. XXXVIII, p. 129.

considéré comme un tout, qu'on appelle la *constante spatiale*. Il s'agit d'examiner si l'admission d'un tel étalon implique une réalisation illégitime de l'espace.

Je ne crois pas qu'il en soit ainsi. En effet, une réalisation illégitime de l'espace ne se produirait que si l'on ne pouvait plus regarder la position comme complètement relative, et comme pouvant être géométriquement définie par ses seules distances à d'autres positions. Mais tous les espaces de courbure constante respectent la relativité de la position, nous l'avons suffisamment vu, car, dans tous ces espaces, les positions ne peuvent être géométriquement définies que par rapport à d'autres positions [1]. Cette série de définitions peut conduire à une régression à l'infini, mais elle peut aussi, comme dans l'espace sphérique, former un cercle vicieux, et revenir à al position d'où elle était partie. Une telle marche ne paraît impliquer aucune réalisation de l'espace, ni conférer à de pures relations aucune existence indépendante. La Métagéométrie tout entière, en un mot, est une preuve que la relativité de la position est compatible avec la grandeur absolue, dans le seul sens requis par les espaces non-euclidiens. Il faut donc conclure qu'il n'y a dans l'absence d'homogénéité (au sens de Delbœuf) rien d'incompatible, soit avec la nature relationnelle de l'espace, soit avec la nature comparative de la grandeur. Cette dernière objection *a priori* contre la Métagéométrie ne peut, par suite, être maintenue, et la question ne peut être tranchée que par des raisons d'ordre empirique.

100. Les fondements de la Géométrie ont été en France l'objet d'un grand nombre de recherches récentes, qui paraissent mériter quelque attention. Mais malgré le splendide travail que les Français ont accompli sur la question connexe du nombre et de la grandeur continue, je ne puis me persuader qu'ils aient réussi à faire faire de notables progrès à la philosophie de la Géométrie. Les principaux auteurs ont été, du côté des mathé-

---

[1] Pour la démonstration complète de cette proposition, *voir* le Chapitre III.

maticiens, Calinon et Poincaré; du côté des philosophes, Renouvier et Delbœuf; et, comme intermédiaire entre les Mathématiques et la Philosophie, Lechalas.

M. Calinon, dans un intéressant article sur l'*Indétermination géométrique de l'Univers* (1), soutient qu'une Géométrie quelconque peut s'appliquer au monde réel moyennant une hypothèse convenable sur la marche des rayons lumineux. En effet, la Terre seule nous est connue autrement que par l'Optique, et la Terre n'est qu'une partie infiniment petite de l'Univers. Cet ordre d'arguments a déjà été discuté à propos de Lotze; mais Calinon ajoute cette nouvelle hypothèse, que la constante spatiale varie peut-être avec le temps. Cela impliquerait, entre l'espace et les autres choses, une relation causale qui paraît difficilement concevable, et qui, si on la regardait comme possible, ruinerait infailliblement la Géométrie, car la Géométrie repose entièrement sur l'hypothèse que la Causalité n'a rien à y voir (2). D'ailleurs, toutes les opérations de mesure prennent un certain temps; si nous ne savions pas que l'espace est resté invariable pendant l'opération, il est difficile de voir comment nos résultats pourraient être dignes de foi, et comment, par conséquent, on pourrait découvrir une variation du paramètre spatial. En fait, on se heurte aux mêmes difficultés que celles qui proviennent de la supposition que l'espace n'est pas homogène.

M. Poincaré soutient que la question de savoir si c'est Euclide ou la Métagéométrie qu'on doit adopter est une question, non de vérité, mais de commodité et de convention; les axiomes sont des définitions déguisées, et le choix entre ces définitions est arbitraire. Cette thèse a été discutée dans le Chapitre I à propos de la théorie de la distance de Cayley, dont on pourrait le déduire.

M. Lechalas est un disciple philosophique de M. Calinon. C'est un rationaliste du type pré-kantien, mais qui croit à la validité de la Métagéométrie. Il prétend que la Géométrie peut

(1) *Revue philosophique*, t. XXXVI, p. 595-607.
(2) *Voir* Chap. III, spécialement § 133.

se passer de tous les postulats purement spatiaux, et se fonder uniquement sur les axiomes de la grandeur [1], qui, dans son opinion, sont purement analytiques. Le principe de contradiction est, pour lui, le seul et unique criterium de la vérité; nous déduisons de nos prémisses de longues chaînes de raisonnements, pour voir s'il en résultera quelque contradiction. On peut objecter à cette théorie que, si elle évite de rendre la Géométrie générale logiquement empirique, elle la rend seulement empiriquement logique; en fait, ce serait nécessairement le sort de tout élément de la connaissance *a priori*, si l'absence de contradiction était le seul criterium de la vérité. Cependant, dans le cas de la Géométrie non-euclidienne, M. Lechalas admet aussi la complète correspondance entre les théorèmes euclidiens et non-euclidiens, comme une preuve que les deux Géométries sont à la fois ou conséquentes ou contradictoires. Il conclut, par suite, que la Géométrie générale est apodictique, bien que l'espace de notre monde réel soit contingent, comme tous les autres phénomènes.

Delbœuf critique l'espace non-euclidien d'un point de vue ultra-réaliste : il prétend que l'espace *réel* n'est ni homogène ni isogène, mais que l'espace *conçu*, qui est tiré par abstraction de l'espace réel, possède ces deux propriétés. Il ne donne aucune justification de son espace réel, qu'il paraît admettre dans un esprit de réalisme naïf, et il ne montre pas comment il a acquis cette connaissance intime de sa constitution [2]. Ses arguments contre la Métagéométrie, dans la mesure où ils ne sont pas des répétitions de ceux de Lotze, ont été discutés ci-dessus.

Enfin M. Renouvier est un néo-kantien, plus ou moins orthodoxe. Ses opinions sur l'importance de la distinction des jugements synthétiques et analytiques, en Géométrie, ont été

---

(1) Pour l'appréciation de cette opinion, *voir* les discussions précédentes sur Riemann et Erdmann.

(2) *Cf.* COUTURAT, *De l'Infini mathématique*, p. 544. Paris, Félix Alcan. 1896.

discutées, en même temps que celles de Kant, au commencement du présent Chapitre ([1]).

101. Avant de passer aux raisonnements positifs du Chapitre suivant, nous allons essayer de résumer brièvement les théories qui ont été invoquées sous forme polémique dans la revue critique que nous venons de clore. Nous avons été d'accord avec Kant pour adopter, comme criterium de l'*a priori*, la nécessité pour toute expérience possible, mais nous avons refusé de discuter, quant à présent, la connexion de l'*a priori* avec le subjectif, vu que nous considérons le criterium purement logique comme suffisant pour nos besoins immédiats. Nous avons aussi refusé d'attacher de l'importance à la distinction des jugements analytiques et synthétiques, parce qu'elle paraît s'appliquer, non à des jugements différents, mais seulement à différentes faces de chaque jugement.

Nous avons discuté ensuite les efforts faits par Riemann pour identifier les éléments empiriques de la Géométrie avec les élé-

---

([1]) Voici une liste des travaux français les plus importants sur la Philosophie de la Géométrie, dans la mesure où j'en ai connaissance :

Andrade, *Les bases expérimentales de la Géométrie euclidienne* (*Revue philosophique*; 1890, II, et 1891, I).

Bonnel, *Les hypothèses dans la Géométrie*. Gauthier-Villars; 1897.

Abbé de Broglie, *La Géométrie non-euclidienne*; deux articles (*Annales de Philosophie chrétienne*; 1890).

Calinon, *Les espaces géométriques* (*Revue philosophique*; I, 1889, et II, 1891).

Sur l'indétermination géométrique de l'univers (*ibid.*; II, 1893).

Couturat, *L'Année philosophique de F. Pillon* (*Revue de Métaphysique et de Morale*; janvier 1893).

Note sur la Géométrie non-euclidienne et la relativité de l'espace (*ibid.*; mai 1893).

Études sur l'espace et le temps (*ibid.*; septembre 1896).

Delboeuf, *L'ancienne et les nouvelles Géométries*; quatre articles (*Revue philosophique*; 1893-1895).

De Tilly, *Recherches sur les éléments de la Géométrie*. Bruxelles, Bruylant-Christophe et Cie; Paris, Ch. Tanera; 1860.

Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique. Bordeaux, Gounouilhou; 1879.

Essai de Géométrie analytique générale [*Mémoires couronnés et autres*

ments qu'on ne peut déduire des idées de grandeur, et nous avons reconnu que cette identification était due à une confusion touchant sur la nature de la grandeur; car les jugements de grandeur, avons-nous dit, postulent toujours quelque base qualitative, qui n'est pas exprimable quantitativement.

En critiquant Helmholtz, nous avons reconnu que la Mécanique présuppose logiquement la Géométrie, quoique l'espace présuppose la matière; mais que cette matière que l'espace présuppose, et à laquelle la Géométrie se réfère indirectement, est une matière plus abstraite que celle de la Mécanique, une matière privée de force et de qualités causales, et douée seulement des attributs purement spatiaux requis pour la possibilité des figures spatiales. Mais nous avons accordé que la Géométrie, quand on s'en sert dans les Mathématiques appliquées ou dans la vie courante, postule quelque chose de plus : elle postule, en effet, un moyen qui permette de découvrir, dans la matière plus concrète de la Mécanique, soit un corps rigide, soit un corps qui s'écarte de la rigidité suivant une loi déterminable

---

Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique, t. XLVII (présenté à la Classe des Sciences, le 10 mai 1892). Publié en supplément à *Mathesis* (Gand, Hoste; Paris, Gauthier-Villars); décembre 1893].

LECHALAS. *La Géométrie générale* (*Critique philosophique*; 1889).

La Géométrie générale et les jugements synthétiques a priori, et *Les bases expérimentales de la Géométrie* (*Revue philosophique*; 1890, II).

M. Delbœuf et le problème des mondes semblables (*ibid.*; 1894, I).

Note sur la Géométrie non-euclidienne et le principe de similitude (*Revue de Métaphysique et de Morale*; mars 1893).

La courbure et la distance en Géométrie générale (*ibid.*; mars 1896).

La Géométrie générale et l'intuition (*Annales de Philosophie chrétienne*; 1890).

Étude sur l'espace et le temps. Paris, Alcan; 1896.

Identité des plans de Riemann et des sphères d'Euclide (ap. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XX, 2e partie; 1896. Reproduit en annexe au journal *Mathesis* de février 1897, avec réponse de M. MANSION).

LIARD, *Des définitions géométriques et des définitions empiriques*, 2e édition. Paris, Alcan; 1888.

MANSION, *Premiers principes de la Métagéométrie ou Géométrie générale* (deux articles de la *Revue néo-scolastique*; mai et août 1896. Publiés séparément, Gauthier-Villars; 1896).

Notes sur la Géométrie euclidienne et sur la Géométrie non-euclidienne (ap. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XIII, XIV,

par expérience. En conséquence, c'est la mensuration *actuelle* que nous sommes convenus de regarder comme empirique.

Nos conclusions, au sujet de l'empirisme de Riemann et de Helmholtz, ont été confirmées par notre critique d'Erdmann. Nous avons eu ensuite à accomplir une tâche opposée, en défendant la Métagéométrie contre Lotze. Nous avons vu alors qu'il y a deux sens dans lesquels la Métagéométrie est possible. Le premier se rapporte à notre espace actuel, et soutient qu'il peut avoir une constante spatiale très petite; le second se rapporte à la théorie philosophique de l'espace, et affirme une possibilité purement logique, qui laisse à l'expérience le soin de décider, si elle est réalisée. Nous avons vu aussi que les objections mathématiques de Lotze provenaient d'une connais-

---

XV, 1888-1890, et de nombreux articles dans le même Recueil, t. XIX, XX, XXI). Dans *Mathesis*, t. VII et VIII, et dans la *Revue des questions scientifiques*, t. XXXVII, précieuse bibliographie.

MILHAUD, *La Géométrie non-euclidienne et la théorie de la connaissance* (*Revue philosophique*; 1888, I).

POINCARÉ, *Les Géométries non-euclidiennes* [ap. *Revue générale des Sciences pures et appliquées* (15 décembre 1891)].

L'Espace et la Géométrie (*Revue de Métaphysique et de Morale*; novembre 1895).

Réponse à quelques critiques (*ibid.*; janvier 1897).

RENOUVIER, *Philosophie de la règle et du compas* (*Critique philosophique*; 1889, et l'*Année philosophique*, 2e année; 1891).

SOREL, *Sur la Géométrie non-euclidienne* (*Revue philosophique*; 1891, I).

TANNERY (PAUL), *Théorie de la connaissance mathématique* (*Revue philosophique*; 1894, II).

NOTE DU TRADUCTEUR : *Cf.* les analyses du présent Ouvrage, par M. LECHALAS, ap. *Annales de Philosophie chrétienne* (août-décembre 1898), et par M. COUTURAT, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale* (mai 1898); un article de M. COUTURAT, *Sur les Rapports du Nombre et de la Grandeur*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale* (juillet 1898), à propos d'un article de M. RUSSELL : *On the Relations of Number and Quantity*, ap. *Mind*, t. IV (nouv. série); deux articles de M. LECHALAS, *Sur l'axiome de Libre Mobilité d'après M. Russell*, et de M. RUSSELL : *Les axiomes propres à Euclide sont-ils empiriques?* ap. *Revue de Métaphysique et de Morale* (novembre 1898); enfin, un article critique de M. POINCARÉ : *Des fondements de la Géométrie, à propos d'un livre de M. Russell* (*Revue de Métaphysique et de Morale*; mai 1899), la réponse de M. RUSSELL : *Sur les axiomes de la Géométrie* (*ibid.*; nov. 1899) et la réplique de M. POINCARÉ (*ibid.*; janv. 1900).

sance insuffisante du sujet, et pouvaient toutes être réfutées par une plus grande connaissance de la Métagéométrie.

Enfin, nous avons discuté la question de la grandeur absolue, et nous n'y avons trouvé aucun obstacle logique aux espaces non-euclidiens. Aussi notre conclusion, dans la mesure où il nous est déjà permis d'en formuler une, est que tous les espaces qui ont une constante spatiale sont admissibles *a priori*, et que l'expérience seule peut décider entre eux. Nous avons reconnu, d'autre part, que des espaces sans constante spatiale, c'est-à-dire des espaces qui ne seraient pas partout homogènes, sont logiquement inadmissibles et impossibles à connaître, et doivent, par suite, être condamnés *a priori*. La démonstration positive de cette thèse fera l'objet du Chapitre suivant.

CHAPITRE III.

SECTION A.

LES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

102. Comme on l'a vu dans le Chapitre I, la Géométrie projective proprement dite n'emploie pas le concept de grandeur et, par suite, ne postule pas ces axiomes qui étaient requis, dans les systèmes de la seconde période (période métrique), uniquement pour rendre possible l'application de la grandeur à l'espace. Mais nous avons vu aussi que la réduction des propriétés métriques aux propriétés projectives, effectuée par Cayley, est purement technique et n'a aucune portée philosophique. Or c'est par les propriétés métriques seules que diffèrent les espaces euclidien et non-euclidiens, en faisant abstraction de l'exception que comporte l'axiome de la ligne droite, et qui, d'ailleurs, présuppose elle-même des propriétés métriques ([1]). Par conséquent, les propriétés dont s'occupe la Géométrie projective (en tant qu'elles sont obtenues sans employer les imaginaires), sont communes à tous les espaces. Enfin, les différences qui apparaissent entre les Géométries des différents espaces de même courbure (par exemple entre les Géométries du plan et du cylindre), sont des différences dans les propriétés projectives ([2]). Ainsi la nécessité qui s'impose, en Géométrie métrique, d'attribuer à l'espace d'autres qualités, en plus de la courbure constante, disparaît lorsque notre espace général est défini par des propriétés purement projectives.

([1]) *Voir*, plus bas, l'*Axiome de la distance,* dans la section B de ce Chapitre.

([2]) Ainsi, sur un cylindre, deux géodésiques, par exemple une génératrice et une hélice, peuvent avoir un nombre quelconque de points d'intersection, ce qui constitue une différence très importante avec le plan.

103. Nous avons donc de bonnes raisons pour présumer que les axiomes de la Géométrie projective seront l'expression la plus simple et la plus complète des conditions indispensables de tout raisonnement géométrique, et cette présomption, j'espère, ne sera pas déçue. On trouvera, si je ne me trompe, que la Géométrie projective, en tant qu'elle traite seulement des propriétés communes à tous les espaces, est entièrement *a priori*, qu'elle n'emprunte rien à l'expérience, et qu'elle a pour objet, comme l'Arithmétique, une création de l'entendement pur. S'il en est ainsi, c'est là cette branche des Mathématiques pures dont Grassmann a pressenti la possibilité dans son *Ausdehnungslehre* de 1844, et qu'il essaya, par une tentative brillante, mais manquée, de construire sans aucun appel à l'espace de l'intuition.

104. Malheureusement, la tâche de découvrir les axiomes de la Géométrie projective est loin d'être facile. Ils n'ont trouvé jusqu'à présent ni un Riemann, ni un Helmholtz pour les formuler philosophiquement. Bien des géomètres ont construit des systèmes qu'ils ont prétendus exempts de présuppositions métriques, et qui le sont réellement, si on les interprète avec un soin suffisant. Mais ces présuppositions sont tellement enracinées dans tous les éléments de la Géométrie que, pour les éliminer, il faudrait reconstruire l'édifice géométrique tout entier. C'est ainsi qu'Euclide, par exemple, traite, dès le début, de l'égalité spatiale : il emploie le cercle, qui est nécessairement défini au moyen de l'égalité des rayons, et il fonde toutes ses propositions ultérieures sur la congruence des triangles, étudiée dans le Ier Livre (1). Aussi, avant d'employer une proposition élémentaire quelconque d'Euclide, même dans le cas où il exprime une propriété projective, on doit prouver que la propriété en question peut se démontrer par les méthodes

---

(1) *Cf.* CREMONA, *Géométrie projective* (*Clarendon Press*, 2e édit.: 1893), p. 50 : « La plupart des propositions des Éléments d'Euclide sont métriques, et il n'est pas facile de trouver parmi elles un exemple de théorème purement descriptif. »

projectives. C'est ce que n'ont pas fait, en général, les géomètres projectifs, qui ont trop souvent supposé, par exemple, qu'on peut établir par leurs principes, d'une manière satisfaisante, la construction du quadrilatère (qui leur sert à introduire les coordonnées projectives, comme on l'a vu dans le Chapitre I), ou le rapport anharmonique, qui paraît métrique au premier abord. Pourtant ces deux suppositions peuvent se justifier, et l'on peut admettre, par conséquent, que c'est à bon droit que la Géométrie projective prétend être logiquement indépendante de la mesure ou de la congruence. Voyons donc comment cela peut se faire.

105. En premier lieu, il importe de bien comprendre que, lorsqu'on emploie des coordonnées en Géométrie projective, ce ne sont pas des coordonnées dans le sens métrique ordinaire, c'est-à-dire les mesures numériques de certaines grandeurs spatiales. Elles forment, au contraire, un ensemble de nombres, assignés arbitrairement, mais systématiquement, aux différents points, comme les numéros des maisons dans une rue, et qui, au point de vue philosophique, servent seulement de désignations commodes pour les points qu'on veut distinguer dans les recherches. Mais, en fait, si l'alphabet n'était pas si court, on pourrait les remplacer par des lettres, comme dans Euclide. Nous avons déjà examiné, dans le Chapitre I, comment on les introduit et ce qu'elles signifient. Nous n'avons ici qu'à rappeler une remarque dont l'oubli a produit bien des contresens.

106. La distinction entre les divers points n'est pas un résultat, mais une condition du système de coordonnées projectives. Le système de coordonnées est un ensemble de signes complètement extérieur et de pure convention, qui ne touche en aucune manière à l'essence de la Géométrie projective. La première chose qu'il faut considérer, en cette matière, est la possibilité de distinguer divers points les uns des autres. C'est ce qu'on peut appeler, avec Veronese (¹), le *premier axiome*

(¹) *Op. cit.*, p. 226.

de la Géométrie. Comment on doit définir un point et comment on peut le distinguer des autres points, cela n'est pas en question pour l'instant, car ici nous voulons seulement découvrir la nature de la Géométrie projective, et le genre de propriétés qu'elle emploie et qu'elle démontre. Comment elle les emploie et les démontre, et avec quel droit, c'est ce que nous examinerons plus tard.

107. Or il est clair qu'une simple collection de points distincts les uns des autres ne peut pas fonder une Géométrie; il faut avoir quelque idée de la manière dont les points sont en corrélation, afin d'avoir un objet suffisant pour l'étude. Mais, puisque l'on exclut toutes les idées de grandeur, les relations entre les points ne peuvent être des relations de distance, au sens ordinaire du mot, ni même des rapports anharmoniques, au sens de la Géométrie ordinaire, car les rapports anharmoniques sont habituellement définis comme les rapports de quatre distances ou de quatre sinus, et sont par là quantitatifs. Mais puisque toute comparaison quantitative présuppose une identité de qualité, on peut s'attendre à trouver, dans la Géométrie projective, le substratum qualitatif sur lequel est édifiée la Géométrie métrique.

C'est bien ce qui arrive, en effet, comme on on va le voir. On n'a pas la distance, mais on *a* la ligne droite; on n'a pas de rapport anharmonique, mais on *a*, pour quatre points quelconques pris sur une ligne, cette propriété d'être les intersections de cette ligne avec les rayons d'un faisceau donné. Sur cette base, on peut construire une science qualitative de l'extériorité abstraite, qui est la Géométrie projective. Nous allons montrer comment on y arrive.

108. Tout raisonnement géométrique est, en dernière analyse, un cercle logique : si l'on commence par admettre les points, on ne pourra les définir que par les lignes ou les plans qui les mettent en rapport, et si l'on commence par admettre les lignes ou les plans, on ne pourra les définir que par les points par lesquels ils passent. C'est là un cercle inévitable, dont la

nécessité se justifiera à mesure que nous avancerons. Il est donc assez indifférent de commencer par les points ou par les lignes, ainsi que le montre mathématiquement le principe, éminemment projectif, de dualité; néanmoins, nous préférerons, avec la plupart des géomètres, commencer par les points ([1]). Nous supposons donc, comme première donnée, un système de points discrets, sans avoir égard, pour le moment, à leurs connexions mutuelles. Mais puisque des connexions sont nécessaires pour raisonner sur eux en tant que système, nous introduirons, pour commencer, l'axiome de la ligne droite. Deux quelconques de ces points, dirons-nous, se trouvent sur une ligne que ces deux points définissent complètement. Cette ligne, étant déterminée par les deux points, peut être regardée comme une relation des deux points, ou comme un attribut du système formé par tous les deux. C'est là le seul attribut purement qualitatif d'un système de deux points, comme on le prouvera plus tard. Or la Géométrie projective ne peut tenir compte que des attributs qualitatifs, et ne peut distinguer différents points que par leurs relations avec d'autres points, puisque tous les points sont, en soi, qualitativement semblables. Il s'ensuit que, pour la Géométrie projective, si l'on donne deux points seulement, ils sont qualitativement indiscernables de deux autres points quelconques pris sur la même ligne droite, puisque ces deux autres points ont entre eux la même relation qualitative. Réciproquement, puisqu'une ligne droite est une figure déterminée par deux quelconques de ses points, et que tous les points sont qualitativement semblables, il s'ensuit que toutes les lignes droites sont qualitativement semblables. On peut donc regarder un point comme déterminé par deux lignes droites qui s'y rencontrent, et, dans cette conception, le point devient la seule relation qualitative qui existe entre les deux lignes droites. Par conséquent, si le point seul est regardé comme donné, les deux lignes droites sont qualitativement indiscernables de tout autre couple de droites passant par le même point.

([1]) On découvrira une raison suffisante de ce choix, lorsque nous arriverons à la Géométrie métrique.

109. L'extension de ces deux principes réciproques constitue l'essence de toutes les transformations projectives et, au fond, de toute la Géométrie projective. Les opérations fondamentales, par lesquelles on transforme projectivement les figures, s'appellent *projection* et *section*. Les diverses formes de projection et de section sont définies dans la *Géométrie projective* de Cremona (Chap. I), à laquelle j'emprunte la citation suivante :

« *Projeter d'un point fixe* S (appelé *centre de projection*) une figure (ABCD ..., *abcd* ...), composée de points et de lignes droites, c'est construire les lignes droites ou *rayons projetants* SA, SB, SC, SD, ... et les plans (*plans projetants*) S*a*, S*b*, S*c*, S*d*, ... On obtient ainsi une nouvelle figure composée de lignes droites et de plans qui passent tous par le centre S.

» *Couper par un plan fixe* σ (*plan transversal*) une figure (αβγδ..., *abcd*...) composée de plans et de lignes droites, c'est construire les lignes droites ou *traces* σα, σβ, σγ, ... et les points ou *traces* σ*a*, σ*b*, σ*c*, ... [1]. On obtient, par ce moyen, une nouvelle figure composée de lignes droites et de points situés dans le plan σ.

» *Projeter d'une ligne droite fixe s* (appelée *axe*) une figure ABCD... composée de points, c'est construire les plans *s*A, *s*B, *s*C, *s*D, ... La figure ainsi obtenue est composée de plans qui passent tous par l'axe *s*.

» *Couper par une ligne droite fixe s* (appelée *transversale*) une figure αβγδ... composée de plans, c'est construire les points *s*α, *s*β, *s*γ, *s*δ, ... On obtient de cette manière une nouvelle figure composée de points tous situés sur la transversale fixe *s*.

» Si une figure est composée des lignes droites *a*, *b*, *c*, ..., qui passent toutes par un point fixe ou *centre* S, on peut la *projeter* d'une ligne droite ou *axe s* passant par S; le résultat est une figure composée des plans *sa*, *sb*, *sc*, ...

---

[1] La ligne droite σα indique la droite commune aux plans σ et α; le point σ*a* indique le point commun au plan σ et à la ligne droite *a*, et de même pour les autres notations.

» Si une figure est composée des lignes droites *a*, *b*, *c*, ..., toutes situées dans un plan fixe, on peut la couper par une ligne droite (transversale) *s*, située dans le même plan; la figure qui en résulte est formée par les points *sa*, *sb*, *sc*, ... »

110. Si l'on applique successivement à une figure quelconque les deux opérations réciproques de projection et de section, on considère la figure ainsi obtenue comme projectivement indiscernable de la première, pourvu seulement que les dimensions de la figure transformée soient les mêmes que celles de la figure primitive; par exemple, si la seconde opération consiste à couper par un plan, la figure primitive doit être une figure plane. Les figures dérivées d'une figure donnée par projection ou par section seulement sont reliées à cette figure par le principe de dualité, dont nous aurons à parler plus loin.

J'essaierai de montrer, dans ce qui suit, en premier lieu, dans quel sens les figures dérivées les unes des autres par des transformations projectives sont qualitativement semblables; en second lieu, quels sont les axiomes, ou les attributs de l'espace, qu'implique le principe de transformation projective; et, en troisième lieu, que ces attributs doivent appartenir à toute forme d'extériorité ayant plus d'une dimension, et sont, par conséquent, des propriétés *a priori* de tout espace possible.

Pour plus de simplicité, je m'en tiendrai, en général, aux figures à deux dimensions. Ce faisant, je n'introduirai aucune différence importante dans les principes, et je simplifierai considérablement le contenu mathématique de mon exposé.

111. Les deux notions mathématiques fondamentales, en Géométrie projective, sont le rapport anharmonique et la construction du quadrilatère, car tout le reste s'en déduit mathématiquement. Or, qu'entend-on, en Géométrie projective, par le rapport anharmonique?

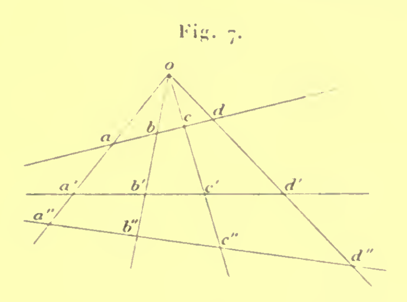
Si nous partions du rapport anharmonique tel qu'on le définit d'ordinaire, nous nous heurterions à la difficulté qui naît de sa nature quantitative [1]. Mais, parmi les propriétés dé-

---

[1] CREMONA (*op. cit.*, Chap. IX, p. 50) définit le rapport anharmonique

duites de cette définition, beaucoup, sinon la plupart, sont purement qualitatives. La plus fondamentale de celles-ci consiste en ce que, si par quatre points quelconques d'une ligne droite on mène quatre lignes droites concourantes, et qu'on mène ensuite une autre droite qui coupe ces quatre lignes, les quatre nouveaux points d'intersection ont le même rapport anharmonique que les quatre points primitifs. Ainsi, dans la *fig.* 7, les séries de points *abcd*, *a'b'c'd'*, *a''b''c''d''* ont le

Fig. 7.



même rapport anharmonique. La relation réciproque vaut pour le rapport anharmonique de quatre lignes droites. On trouve ainsi très simplement la base requise pour une définition qualitative. Cette définition devra se formuler comme suit :

Deux séries de quatre points chacune ont par définition le même rapport anharmonique, lorsque : 1° les quatre points de chaque série sont sur une même ligne droite, et 2° les points correspondants des deux séries se trouvent deux à deux sur quatre droites qui passent par un même point, ou lorsque les deux séries sont dans cette relation avec une troisième [1]. Et corrélativement : Deux faisceaux de quatre droites ont par définition le même rapport anharmonique, lorsque : 1° les quatre droites de chaque faisceau passent par un seul point, et

---

comme une propriété métrique qui n'est pas altérée par la projection. Mais cela enlève à la Géométrie projective son indépendance logique, qui ne peut être maintenue que par une définition purement descriptive du rapport anharmonique.

[1] Il n'existe aucune propriété correspondante pour trois points en ligne droite, parce qu'on peut les transformer projectivement en trois autres points quelconques de la même ligne. *Voir* § 120.

2° les lignes correspondantes des deux faisceaux se coupent deux à deux en quatre points en ligne droite, ou lorsque les deux faisceaux sont dans cette relation avec un troisième.

Deux systèmes de points ou de lignes qui ont le même rapport anharmonique sont traités comme équivalents par la Géométrie projective : cette équivalence qualitative remplace l'équivalence quantitative de la Géométrie métrique, et est évidemment impliquée, par définition, dans l'énoncé que nous avons donné plus haut des transformations projectives en général.

112. Nous avons ensuite à considérer la construction du quadrilatère ([1]). Elle a une double fin : premièrement, définir l'important cas particulier connu sous le nom de *proportion harmonique;* et, secondement, fournir une méthode pour assigner différents nombres aux différents points, d'une manière complète et sans ambiguïté. Cette dernière méthode a elle-même un double but : en premier lieu, de fournir un symbolisme approprié pour décrire et distinguer les différents points et de frayer ainsi la voie à l'introduction de l'Analyse; et, en second lieu, d'assigner ces nombres de telle sorte que, s'ils avaient leur signification métrique ordinaire, en tant que distances comptées à partir d'un point sur la ligne droite numérotée, on ait la valeur — 1 pour le rapport anharmonique d'une proportion harmonique, et que, si quatre points ont le même rapport anharmonique que quatre autres, les nombres correspondants aient aussi le même rapport anharmonique. Cette dernière condition se justifie par des motifs purement techniques : en se conformant à nos habitudes, elle évite la confusion que produirait toute autre valeur attribuée au rapport harmonique; elle nous permet, si l'on désire une interprétation métrique des résultats projectifs, de faire cette interprétation sans transformations numériques fastidieuses; enfin, elle permet d'effectuer des transformations projectives par des méthodes algébriques. En revanche, au point de vue strictement

---

([1]) Due à von Staudt, *Geometrie der Lage.*

projectif, les nombres introduits ont une signification purement conventionnelle, comme on l'a remarqué précédemment; et tant qu'on ne passe pas à la Géométrie métrique, on ne peut trouver aucune raison pour assigner la valeur -1 à la proportion harmonique. Après ces préliminaires, voyons en quoi consiste la construction du quadrilatère.

113. En Géométrie élémentaire, une proportion harmonique est une série de quatre points dont le rapport anharmonique est -1, ou dans laquelle les trois segments formés par quatre points sont en progression harmonique, ou encore dans laquelle le rapport des deux segments intérieurs est égal au rapport des deux segments extérieurs. Si a, b, c, d sont les quatre points, on voit aisément que ces trois définitions sont

Fig. 8.

a b c d

équivalentes entre elles (*fig.* 8) : elles donnent respectivement :

$$\frac{ab}{bc} : \frac{ad}{dc} = -1, \qquad \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} = \frac{1}{ac} - \frac{1}{ad} \qquad \text{et} \qquad \frac{ab}{bc} = \frac{ad}{cd}.$$

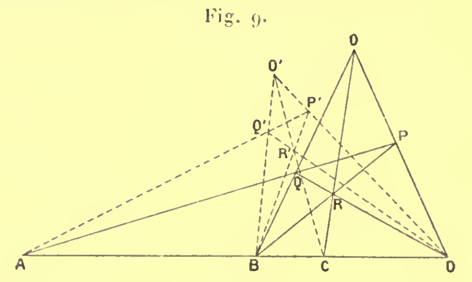
Mais comme ces définitions sont toutes quantitatives, elles ne peuvent être employées pour le présent objet. Toute définition qui implique la bipartition des lignes ou des angles n'est pas non plus valable. Il faut avoir une définition qui procède entièrement au moyen de lignes droites et de points, sans aucune mesure de distances ou d'angles ([1]). La construction du quadrilatère nous fournit une telle définition, en même temps que la preuve que le résultat de cette construction est unique. Comme cette preuve est l'exemple le plus simple et le plus important d'un raisonnement projectif, je vais la reproduire ici en même temps que la construction.

La construction du quadrilatère est la suivante : Soient A,

([1]) La suite de ce paragraphe, sauf le dernier alinéa, a été substituée par l'auteur à la page 125 du livre anglais. (*Note du trad.*)

B, D trois points donnés en ligne droite (*fig.* 9). Prenons un

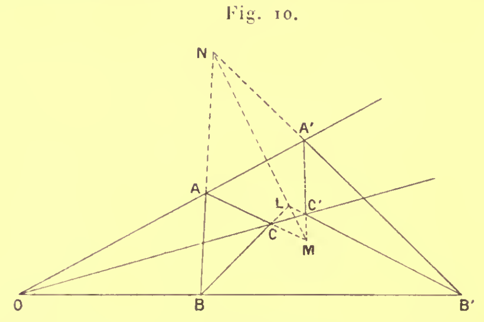
Fig. 9.



point quelconque O en dehors de la ligne droite ABD, et joignons OB, OD. Menons par A une droite quelconque AQP, qui coupe OB et OD en Q et en P. Joignons DQ, BP qui se rencontrent en R. Joignons OR qui rencontre ABD en C. C est alors le quatrième point donné par la construction du quadrilatère. Il s'agit de prouver que l'on obtient toujours le même point C, quels que soient le point O et la droite AQP.

Pour le prouver, nous nous appuierons sur le lemme suivant (*fig.* 10) : Soient ABC, A'B'C' deux triangles dans des

Fig. 10.



plans différents, tels que AA', BB', CC' se rencontrent en un point O. Alors je dis que BC, B'C' se rencontrent en un point L, CA, C'A' en un point M et AB, A'B' en un point N, et que L, M et N sont en ligne droite. En effet, puisque BB' et CC' se coupent, les points B, C, B', C' se trouvent dans un même plan, et, par suite, B, C, B', C' se coupent en un certain point L [1]. Mais ce point doit se trouver dans le plan ABC et aussi

[1] En Géométrie hyperbolique, ce point peut être imaginaire.

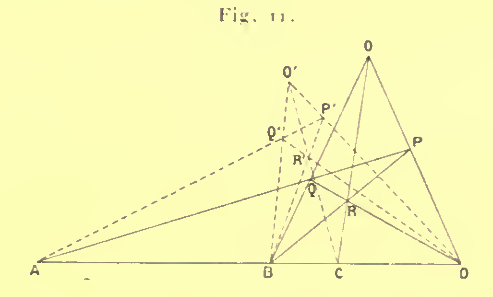
dans le plan A'B'C'. Il se trouve donc sur la droite d'intersection de ces plans. De même M et N se trouvent sur cette ligne droite. Donc L, M et N sont en ligne droite.

Réciproquement, si BC, B'C'; CA, C'A'; AB, A'B' se coupent en trois points situés en ligne droite, AA', BB', CC' concourent en un même point. La démonstration est simple.

Pour prouver que le point C, obtenu par la construction du quadrilatère, est unique, effectuons deux semblables constructions en des plans différents. (La seconde construction est indiquée sur la figure par des lignes pointillées et par des lettres accentuées.) Il s'agit alors de prouver que O'R' rencontre ABD au même point C que OR.

Dans les triangles PQR, P'Q'R' (*fig.* 11), les droites PQ,

Fig. 11.



P'Q se rencontrent en A; QR, Q'R' en D; et PR, P'R' en B. Par conséquent, PP', QQ', RR' se rencontrent en un point. De même, PP', QQ', OO' se rencontrent en un point. Donc PP', QQ', RR', OO' se rencontrent toutes en un point. Donc, dans les triangles OQR, O'Q'R', OR et O'R' se rencontrent en un point situé sur la droite BD, c'est-à-dire en C; ce qu'il fallait démontrer. Pour prouver le même théorème pour deux constructions dans le même plan, il suffit de les comparer à une troisième construction faite dans un plan différent. Ainsi le point C est le même, de quelque manière qu'on choisisse O et AQP, et dépend seulement de A, B, D. Les points A, B, C, D forment, par définition, une proportion harmonique, et C est appelé le *conjugué harmonique* de A par rapport à B et D.

L'introduction des nombres, au moyen de cette construction, n'offre aucune difficulté de principe (excepté, bien en-

tendu, celles qui s'attachent toujours à l'application du nombre au continu). Elle est exposée d'une manière satisfaisante dans l'Ouvrage de Klein [1]. Le principe de cette application consiste à assigner les nombres, 0, 1, ∞ aux points A, B, D et, par suite, le nombre 2 à C, afin que les différences AB, AC, AD soient en progression harmonique. En prenant B, C, D comme une nouvelle triade correspondant à A, B, D, on trouve le conjugué harmonique de B par rapport à C et D et on lui assigne le nombre 3; et ainsi de suite. De cette manière, on peut obtenir un nombre quelconque de points, et l'on est sûr de n'avoir aucun nombre et aucun point deux fois; de sorte que ces coordonnées jouissent de leur propriété essentielle, qui est une correspondance univoque et réciproque avec les points qu'elles désignent.

114. Le point important, dans la construction précédente et la raison pour laquelle je l'ai exposée en détail, est qu'elle procède entièrement au moyen des principes généraux de transformation énoncés ci-dessus. A partir de ce stade, tout s'effectue au moyen des deux idées fondamentales que nous venons d'exposer (§ 111), et, par conséquent, tout dépend du principe général de l'équivalence projective. Ce principe, appliqué à deux dimensions, peut être formulé plus simplement que dans le passage de Cremona cité ci-dessus (§ 109). En Géométrie plane, on part des définitions suivantes :

Projeter les points A, B, C, D, ... d'un centre O, c'est construire les lignes droites OA, OB, OC, OD, ...

Couper plusieurs lignes droites a, b, c, d, ... par une transversale s, c'est construire les points sa, sb, sc, sd, ... [2].

L'application successive de ces deux opérations, pourvu que la figure primitive se compose de points en ligne droite ou de droites issues d'un même point, donne une figure projectivement indiscernable de la première; donc, par extension, si

[1] *Nicht-Euklid*, t. I, p. 337 et suiv. *Cf.* § 36 de cet Ouvrage.

[2] De ces définitions résultent, par le principe de dualité, les définitions correspondantes, pour la multiplicité à deux dimensions des lignes qui passent par un point.

des points situés en ligne droite dans la figure primitive se trouvent en ligne droite dans la figure transformée (et si la proposition corrélative est vraie pour les lignes droites issues d'un même point), les deux opérations auront donné des figures projectivement semblables. Ce principe général peut être regardé comme consistant en deux parties, suivant l'ordre des opérations : si l'on commence par la projection et qu'on finisse par la section, on transforme une figure ponctuelle en une autre figure ponctuelle; dans l'ordre inverse, on transforme une figure linéaire en une autre figure linéaire.

115. Pour pouvoir tirer au clair la signification de ce principe, il faut avoir quelque notion de la définition des points et des lignes droites. Mais, en Géométrie projective, on ne peut pas donner cette définition sans s'expliquer sur le principe de dualité, qui est la forme mathématique du cercle philosophique impliqué dans les définitions géométriques.

En nous bornant pour le moment à deux dimensions, le principe affirme, en gros, que tout théorème portant sur des lignes issues d'un même point et des points situés sur une même ligne, reste vrai si l'on permute ces deux termes partout où ils se trouvent. Par exemple : deux points se trouvent sur une ligne droite qu'ils déterminent complètement; et deux lignes droites se rencontrent en un point, qu'elles déterminent complètement. Les quatre points d'intersection d'une transversale avec quatre lignes issues d'un point ont un rapport anharmonique indépendant de cette transversale particulière; et les quatre lignes qui joignent quatre points d'une droite à un cinquième point ont un rapport anharmonique indépendant de ce cinquième point. Ainsi le principe général de transformation projective a deux faces : d'un côté, les points se déplacent sur des lignes fixes, et de l'autre, les lignes tournent autour de points fixes.

Cette dualité donne à penser que toute définition de points doit s'effectuer au moyen de la ligne droite, et toute définition de la ligne droite au moyen de points. Il est vrai que, lorsqu'on prend en considération la troisième dimension, la dualité n'est plus aussi simple; on a alors à tenir compte aussi du plan, mais

cela ne fait qu'introduire un cercle de trois termes, qui n'est guère préférable à un cercle de deux termes. On dit alors : Trois points, ou une ligne droite et un point, déterminent un plan ; mais inversement, trois plans, ou une ligne droite et un plan, déterminent un point. On peut regarder la ligne droite comme une relation entre deux de ses points, mais on peut aussi regarder le point comme une relation entre deux lignes droites qui y passent. On peut regarder le plan comme une relation entre trois points, ou entre un point et une ligne, mais on peut aussi regarder le point comme une relation entre trois plans, ou entre une ligne et un plan, qui s'y rencontrent.

116. Comment faire pour sortir de ce cercle ? Le fait est que, en Géométrie pure, on ne peut pas en sortir. Car l'espace, comme nous le verrons plus complètement dans la suite, n'est rien de plus qu'un ensemble de relations ; donc, si l'on prend une figure spatiale quelconque et qu'on cherche les termes dont elle est une relation, on est forcé, en Géométrie, de chercher ces termes dans l'espace, puisqu'on ne peut les chercher nulle part ailleurs, mais on est condamné à voir ces termes s'évanouir à mesure qu'on les saisit, attendu que tout ce qui est purement spatial n'est qu'une simple relation.

Ainsi la relativité de l'espace, en même temps qu'elle est l'essence du principe de dualité, interdit d'exprimer ce principe, ou tout autre principe de Géométrie pure, d'une manière qui soit exempte de contradictions. Néanmoins, si nous voulons avancer dans notre analyse du raisonnement géométrique avec nos définitions de la ligne et du point, il nous faut, pour un temps, ignorer cette contradiction ; il nous faut raisonner comme si elle n'existait pas, de manière à affranchir notre science de toutes les contradictions qui ne sont pas inévitables.

117. Conformément à cette méthode, définissons nos points comme les termes des relations spatiales, en regardant tout ce qui n'est pas un point comme une relation entre des points. Comment, dans cette conception, faut-il concevoir nos points ?

Évidemment, si l'étendue est pure relativité, il faut les considérer comme ne contenant aucune étendue; mais s'ils doivent servir de termes aux relations spatiales, par exemple aux lignes droites, il faut que ces relations les montrent comme les termes des figures qu'ils déterminent. Autrement dit, puisque l'on ne peut prendre réellement, sans contradiction, comme terme d'une relation spatiale, que ce qui est inétendu, le terme que doit employer la Géométrie, où l'on ne peut pas sortir de l'espace, ne peut être que la plus petite chose spatiale que la Géométrie puisse considérer, c'est-à-dire la chose qui, tout en étant *dans* l'espace, ne *contient* aucun espace; et cette chose sera par définition le point ([1]).

Si donc on néglige la contradiction fondamentale inhérente à cette définition, toutes les autres définitions s'ensuivent sans difficulté. La ligne droite est la relation entre deux points, et le plan est la relation entre trois points. Ces définitions seront établies et défendues tout au long dans la section B de ce Chapitre ([2]), où nous pourrons discuter en même temps les définitions métriques correspondantes; pour notre présent objet, il suffit d'observer que la Géométrie projective regarde, dès le début, la ligne droite comme déterminée par deux points, et le plan comme déterminé par trois; d'où il suit que, si l'on prend les points comme termes possibles de relations spatiales, la

---

([1]) Il importe de remarquer que cette définition du Point introduit des idées qui ne sont pas strictement projectives. Avec les principes strictement projectifs, on le sait, rien ne paraît donner au point une prééminence sur le plan, ou généralement, dans un espace à n dimensions, sur la figure plane à $(n-1)$ dimensions. En Géométrie métrique, le point peut être défini comme le zéro de grandeur spatiale. Mais, dans la Géométrie projective, d'où l'idée de grandeur doit être exclue, il vaut peut-être mieux définir le point au moyen de la relation du tout et de la partie. Chaque chose spatiale, excepté l'espace et le point, est à la fois un tout composé de parties et une partie d'autres touts. L'espace lui-même est seulement un tout, mais non une partie; le point est seulement une partie, et ne se compose pas d'autres parties. De cette manière, à parler strictement, on ne fait pas appel à l'idée de grandeur quand on définit le point comme le résultat d'une division infinie; car, en ce sens, la division implique seulement la relation du tout et de la partie. (Cette Note a été substituée par l'auteur à la Note de la page 128 du Livre anglais.)

([2]) §§ 163-175.

ligne droite et le plan peuvent être regardés comme des relations entre deux et trois points respectivement. Si l'on accepte ces définitions, nous pouvons passer à la discussion du principe fondamental de la Géométrie projective, et à l'analyse des axiomes que son affirmation implique.

118. La Géométrie projective, nous l'avons vu, ne s'occupe pas de la grandeur, et par suite ne reconnaît aucune différence là où la différence est purement quantitative. Or une comparaison quantitative repose sur une identité reconnue de qualité; la reconnaissance de l'identité qualitative est donc logiquement antérieure à la quantité, et est présupposée par tout jugement de grandeur. Par conséquent, toutes les figures dont les différences peuvent être complètement décrites par la grandeur, c'est-à-dire par la seule mesure, présentent nécessairement une identité de qualité, que l'on doit pouvoir reconnaître sans faire appel à la grandeur. Il s'ensuit que, en définissant le mot *qualité* en termes géométriques, on doit découvrir quels systèmes de figures sont projectivement indiscernables. Si notre définition est juste, elle doit nous fournir le principe projectif général dont nous nous occupons.

119. Nous sommes convenus de regarder les points comme les termes des relations spatiales, et nous avons admis qu'on peut distinguer différents points. Mais nous avons ajourné la discussion des conditions auxquelles cette distinction peut être effectuée. Cette discussion va nous fournir la définition de la qualité et la démonstration de notre principe projectif général.

Tout d'abord, les points ont été définis comme n'étant rien de plus que les termes des relations spatiales. Par suite, ils n'ont aucune propriété intrinsèque; ils ne se distinguent qu'au moyen de leurs relations. Or la relation entre deux points, avons-nous dit, est la ligne droite sur laquelle ils se trouvent. Cela nous donne, pour tous les couples de points sur la même ligne droite, cette identité de qualité qui est requise à la fois par notre principe projectif et par la Géométrie métrique (car c'est seulement là où existe cette identité de qualité que peut

s'appliquer proprement la quantité). Si l'on ne donne que deux points, on ne peut les distinguer de deux autres points quelconques sur la même ligne droite, sans faire usage de la grandeur; car la relation qualitative entre deux points quelconques de cette droite est la même que pour le couple primitif, et des points ne peuvent se distinguer les uns des autres que par une différence de relation.

Mais, réciproquement, la ligne droite n'est rien de plus que la relation de deux de ses points, et tous ses points sont qualitativement semblables. Il n'y a donc rien qui distingue une ligne droite d'une autre, si ce n'est les points par où elle passe ; et ceux-ci ne se distinguent des autres points que par le fait qu'elle y passe. Nous obtenons ainsi la transformation réciproque : si l'on nous donne un seul point, un couple quelconque de lignes droites passant par ce point est qualitativement indiscernable de n'importe quel autre. Or, c'est là, d'une part, la base de la seconde partie de notre principe projectif général, et, d'autre part, la condition de l'application de la grandeur à l'écart de deux lignes droites qui se coupent, dans la mesure des angles.

120. On peut maintenant apercevoir la raison d'un fait qui a pu jusqu'ici paraître quelque peu arbitraire, à savoir de la nécessité de *quatre* points en ligne droite pour constituer un rapport anharmonique. En se reportant à la construction du quadrilatère et à l'introduction du nombre, qui en résulte, on voit que le rapport anharmonique est une relation projective intrinsèque entre quatre points en ligne droite ou entre quatre lignes droites concourantes, de telle sorte que, étant donnés trois termes et cette relation, le quatrième terme peut être déterminé d'une manière unique par une méthode projective. Or considérons d'abord un couple de points. Puisque toutes les lignes droites sont projectivement équivalentes, la relation entre un couple de points est exactement équivalente à celle qui existe entre un autre couple. Par suite, un seul point étant donné, on ne peut lui assigner, par rapport à un second point quelconque, aucune relation projective qui puisse limiter, en quelque manière, le choix de ce second point. Mais, étant donnés

deux points, il y a une telle relation, à savoir que le troisième point peut être donné en ligne droite avec les deux premiers. Cela limite sa position à une seule ligne droite, mais puisque deux points ne déterminent rien de plus qu'une ligne droite, le troisième point ne peut pas être déterminé davantage. On voit ainsi pourquoi l'on ne peut trouver entre trois points aucune relation projective intrinsèque qui nous permette, au moyen des deux premiers, de déterminer le troisième d'une manière unique. Mais, avec trois points donnés en ligne droite, nous avons plus de données que n'en comporte une simple ligne droite, et la construction du quadrilatère nous permet de déterminer, d'une manière unique, un nombre quelconque de nouveaux points sur la même ligne. Cela montre pourquoi le rapport anharmonique est nécessairement une relation entre quatre points, plutôt qu'entre trois.

121. Nous pouvons maintenant prouver, je crois, que deux figures qui sont reliées entre elles par une transformation projective sont qualitativement semblables. Commençons par une collection de points sur une ligne droite. Tant qu'on les considère sans référence à d'autres points ou figures, ils sont tous qualitativement semblables. On peut les distinguer par l'intuition immédiate, mais quand on essaie de les distinguer conceptuellement, sans le secours de la grandeur, on trouve que c'est impossible, puisque la seule relation qualitative de deux quelconques d'entre eux, à savoir la ligne droite, est la même pour deux autres quelconques. Mais maintenant choisissons, au hasard, un point en dehors de la ligne droite. Les points de notre ligne acquièrent alors de nouveaux attributs, à savoir leurs relations au nouveau point, c'est-à-dire les lignes droites qui les joignent à ce nouveau point. Mais, réciproquement, ces lignes droites définissent seules notre point extérieur, et toutes les lignes droites sont qualitativement semblables. Si donc on prend un autre point extérieur et qu'on le joigne aux mêmes points de la ligne droite primitive, on obtient une figure qui ne présente aucune différence conceptuelle avec la figure précédente, aussi longtemps

que la grandeur en est exclue. L'intuition immédiate peut distinguer les deux figures, mais la discrimination qualitative ne le peut pas. On obtient ainsi une transformation projective de quatre lignes en quatre autres lignes, comme donnant une figure qualitativement indiscernable de la figure primitive. Un raisonnement semblable s'applique aux autres transformations projectives. Ainsi la seule raison qu'on ait, en Géométrie projective, pour ne pas regarder les figures projectives comme actuellement identiques, est la perception intuitive de leur différence de position. Cela est fondamental, et il faut l'accepter comme une donnée. Cette donnée est présupposée dans la distinction des divers points, et forme l'âme même de la Géométrie. C'est là, en fait, l'essence de la notion d'une forme d'extériorité, laquelle constitue l'objet de la Géométrie projective.

122. Nous pouvons maintenant résumer les résultats de notre analyse de la Géométrie projective, et énoncer les axiomes qui servent de base à ses déductions. Nous aurons ensuite à prouver que ces axiomes sont nécessaires à toute forme d'extériorité, ce qui nous fera passer de la pure analyse à un argument transcendantal.

Les axiomes qui ont été admis dans l'analyse précédente, et qui, semble-t-il, suffisent à fonder la Géométrie projective, peuvent être formulés en gros comme suit :

I. On peut distinguer différentes parties de l'espace, mais toutes ces parties sont qualitativement semblables, et ne se distinguent que par le fait immédiat qu'elles sont situées les unes en dehors des autres.

II. L'espace est continu et divisible à l'infini; le résultat de cette division infinie, le zéro d'étendue, s'appelle *point* (1).

III. Deux points quelconques déterminent une figure unique, appelée *ligne droite;* trois points quelconques, en général,

(1) Sur cet axiome, toutefois, *cf.* § 131.

déterminent une figure unique, le *plan*. Quatre points quelconques déterminent une figure correspondante de trois dimensions, et il n'y a aucune raison pour que la même chose ne soit pas vraie d'un nombre quelconque de points. Mais ce processus prend fin, tôt ou tard, avec un certain nombre de points qui déterminent la totalité de l'espace. Car, s'il n'en était pas ainsi, aucun nombre de relations d'un point à une collection de points donnés ne pourrait jamais déterminer sa relation à des nouveaux points, et la Géométrie deviendrait impossible (¹).

Cet énoncé des axiomes n'a pas la prétention d'avoir une précision exclusive : on pourrait aisément trouver d'autres énoncés également valables. Car tous ces axiomes, comme nous le verrons plus tard, dépendent philosophiquement les uns des autres, et peuvent, par suite, être formulés de bien des manières. Quoi qu'il en soit, l'énoncé précédent comprend, si je ne me trompe, tout ce qui est essentiel à la Géométrie projective, et tout ce qui est requis pour démontrer le principe de la transformation projective. Avant de discuter l'apriorité de ces axiomes, résumons encore une fois les fins qu'ils sont destinés à atteindre.

123. Au point de vue exclusivement mathématique, nous l'avons vu, la Géométrie projective recherche seulement quelles figures peuvent se déduire les unes des autres par des transformations projectives, c'est-à-dire par les opérations de projection et de section. Ces opérations, dans toutes leurs formes, présupposent le point, la ligne droite et le plan (²), dont la nécessité pour la Géométrie projective, au point de vue purement mathématique, est ainsi évidente par elle-même dès le début. Mais philosophiquement, la Géométrie projective a, nous l'avons vu, une plus grande portée. Cette portée plus

---

(¹) Pour la démonstration de cette proposition, *voir* Chap. III, sect. B, *Axiome des dimensions*.

(²) Dans toutes les discussions de la Géométrie générale, la ligne droite et le plan ne sont pas nécessairement euclidiens. Ce sont simplement des figures déterminées, en général, respectivement par deux et par trois points; la question de savoir s'ils se conforment à l'axiome des parallèles et à la forme euclidienne de l'axiome de la ligne droite, ne doit pas entrer en considération dans leur définition générale.

grande, qui donne à la recherche des figures projectivement équivalentes son importance capitale, consiste dans sa détermination de la similitude spatiale qualitative, c'est-à-dire dans la détermination de toutes les figures qui, étant donnée une figure quelconque, ne peuvent se distinguer de cette figure que par le seul fait qu'elles lui sont extérieures, aussi longtemps qu'on en exclut la quantité.

124. Or quand on considère ce qu'implique cette équivalence qualitative absolue, on trouve aussitôt, comme sa condition la plus manifeste, la parfaite homogénéité de l'espace. Car cela suppose qu'une figure peut être complètement définie par ses relations internes, et que les relations externes qui constituent sa position, tout en suffisant à la distinguer des autres figures, n'affectent en aucune manière ses propriétés internes, celles-ci étant regardées comme qualitativement identiques à celles d'autres figures qui ont des relations externes tout à fait différentes. S'il n'en était pas ainsi, il ne pourrait y avoir rien d'analogue à une transformation projective. Car une telle transformation change toujours la position d'une figure, c'est-à-dire ses relations externes, et par suite, si les figures dépendaient de leurs relations à d'autres figures ou à l'espace vide, on ne pourrait étudier cette transformation sans référence à d'autres figures, ou à la position absolue de la figure primitive. Bref, notre principe postule ce qu'on peut appeler la *passivité* mutuelle et l'*indépendance* réciproque de deux parties ou de deux figures de l'espace.

Cette passivité et cette indépendance impliquent l'homogénéité de l'espace, ou son équivalent, la relativité de la position. Car si les propriétés internes d'une figure sont les mêmes, quelles que soient ses relations externes, il s'ensuit que toutes les parties de l'espace sont qualitativement semblables, puisqu'un changement de relation externe est un changement de la partie de l'espace occupée. Il s'ensuit encore que toute position est relative et extrinsèque, c'est-à-dire que la position d'un point, ou la partie de l'espace occupée par une figure, n'est pas une propriété intrinsèque du point ou de la figure, et n'a aucun

effet sur ses propriétés intrinsèques, mais est exclusivement une relation à d'autres points ou figures de l'espace, et reste sans effet, excepté là où il s'agit de relations du même genre.

125. L'homogénéité de l'espace et la relativité de la position sont donc présupposées dans la comparaison spatiale qualitative dont s'occupe la Géométrie projective. La relativité de la position est aussi, on l'a vu, la base du principe de dualité. Or ces propriétés, comme je vais maintenant essayer de le prouver, appartiennent nécessairement à toute forme d'extériorité, et sont ainsi des propriétés *a priori* de tous les espaces possibles. Mais, pour le démontrer, il faut d'abord définir la notion d'une forme d'extériorité en général.

Remarquons tout d'abord que la distinction entre les Géométries euclidienne et non-euclidiennes, si importante dans les recherches métriques, disparaît dans la Géométrie projective proprement dite. Cela fait présumer que la Géométrie projective, quoique inventée à l'origine comme science de l'espace euclidien, et ultérieurement aussi des espaces non-euclidiens, s'occupe en réalité d'une notion plus large, qui comprend les deux sortes d'espaces et néglige les attributs par lesquels elles diffèrent. C'est cette notion que j'appellerai une *forme d'extériorité*.

126. Dans la profonde Introduction philosophique de son *Ausdehnungslehre* de 1844, Grassmann a émis l'idée que la Géométrie, improprement regardée comme une science pure, est en réalité une branche des Mathématiques appliquées, puisqu'elle traite d'un objet qui n'est pas, comme le nombre, créé par l'entendement, mais qui lui est donné, et qui, par suite, n'est pas complètement soumis à ses seules lois. Mais il doit être possible, prétendait-il, de construire une branche des Mathématiques pures, c'est-à-dire une science dont l'objet serait entièrement une création de l'esprit, et qui pourtant traiterait de l'étendue comme le fait la Géométrie, mais de l'étendue en tant que conçue, et non en tant qu'empiriquement perçue dans la sensation ou dans l'intuition.

A ce point de vue, la controverse entre les kantiens et leurs adversaires perd toute raison d'être, puisque la distinction entre les Mathématiques pures et appliquées ne réside pas dans la distinction entre le subjectif et l'objectif, mais entre ce qui est purement intellectuel, d'une part, et tout ce qui ne l'est pas, d'autre part. Or Kant a soutenu avec la plus grande énergie que l'espace n'est pas une construction intellectuelle, mais une intuition subjective. Par suite, d'après la distinction de Grassmann, la Géométrie appartient aux Mathématiques appliquées aussi bien dans l'opinion de Kant que dans celle de ses adversaires. Et la distinction de Grassmann est, à mon avis, la plus importante pour l'Épistémologie, et celle qu'on doit adopter pour distinguer l'*a priori* de l'empirique. Car ce qui est purement intuitif peut changer sans renverser les lois de la pensée, sans rendre la connaissance formellement impossible; mais ce qui est purement intellectuel ne peut changer sans que les lois de la pensée changent et que toute notre connaissance s'écroule en même temps. Je suivrai donc la distinction de Grassmann en construisant une forme *a priori* et purement conceptuelle d'extériorité.

127. La pure théorie de l'extension, telle que Grassmann l'a construite, n'a pas besoin d'être discutée, car elle contenait bien des matériaux empiriques, et elle échoua comme tentative philosophique. Mais ses principes nous permettront, je crois, de prouver que la Géométrie projective, abstraitement interprétée, est la science qu'il a entrevue, et porte sur une matière qui peut être construite par le seul entendement pur. Seulement, s'il en est ainsi, il faut remarquer que la Géométrie projective devient pour le moment purement hypothétique [1]. Comme Bradley l'a montré [2], toute vérité nécessaire est hypothétique, et ne fait qu'affirmer, à première vue, le principe sur lequel repose la connexion nécessaire des prémisses et de

[1] J'essaierai de prouver, dans le Chapitre IV, que la Géométrie projective a nécessairement une portée réelle.

[2] *Logic*, Livre I, Chap. II.

la conclusion. Si nous construisons un pur concept de l'extériorité, et que nous abandonnions ainsi notre espace actuellement donné, le résultat de notre construction restera sans portée réelle, tant que nous ne reviendrons pas à quelque chose d'actuellement donné; car il affirme simplement ceci : si l'on *a* l'expérience d'une extériorité, il faut qu'il y ait une forme d'extériorité douée de telles et telles propriétés. Que l'on ait nécessairement l'expérience d'une extériorité, le premier argument de Kant sur l'espace le prouve, je pense, pour ceux qui admettent l'expérience d'un monde de choses diverses mais en relation réciproque. Mais c'est là une question qui appartient au Chapitre suivant.

Ce que nous avons à rechercher ici, ce n'est pas s'il y a une forme d'extériorité, mais si, au cas où il y en aurait une, elle doit posséder les propriétés incarnées dans les axiomes de la Géométrie projective. Mais, avant tout, qu'entendons-nous par une telle forme?

128. Dans un monde où la perception nous représente des choses diverses, avec des contenus distingués et différenciés, il faut qu'il y ait, dans la perception, au moins un *principe de différenciation,* c'est-à-dire un élément par lequel les choses représentées soient distinguées comme diverses. Cet élément, pris isolément, et abstrait du contenu qu'il différencie, peut être appelé une *forme d'extériorité.* Que cet élément, pris isolément, doive apparaître comme une forme, et non comme une simple diversité du contenu matériel, c'est, je crois, ce qui est tout à fait évident. Car une diversité de contenu matériel ne peut pas être étudiée à part de ce contenu matériel; or ce que nous voulons étudier ici, au contraire, c'est la pure possibilité d'une telle diversité, c'est-à-dire ce qui reste, comme j'essaierai de le prouver plus loin (¹), quand on fait abstraction, dans chaque perception sensible, de tout ce qui distingue sa matière particulière. C'est cette possibilité, ce principe de pure diversité qui est notre forme d'extériorité. Jusqu'à quel point il est

(¹) Chap. IV, §§ 186-191.

nécessaire d'admettre une telle forme comme distincte des choses en relation réciproque, c'est ce que j'étudierai plus tard ([1]). Pour le moment, puisque l'espace, tel que le considère la Géométrie, est certainement une forme de cette espèce, nous avons seulement à nous demander : Quelles sont les propriétés que doit nécessairement posséder une telle forme, quand on l'étudie à l'état d'abstraction?

129. En premier lieu, l'extériorité est une notion essentiellement relative, car rien ne peut être extérieur à soi-même. Être extérieur à quelque chose, c'est être autre chose avec quelque rapport à cette chose. Par suite, quand on abstrait une forme d'extériorité de tout contenu matériel, et qu'on l'étudie isolément, la position doit nécessairement apparaître comme purement relative : une position ne peut avoir aucune qualité intrinsèque, car notre forme consiste en une pure extériorité, et l'extériorité ne contient aucune ombre ni trace d'une qualité intrinsèque. Nous obtenons ainsi notre postulat fondamental, la relativité de la position, ou, comme on peut l'exprimer, l'*absence* complète de tout vestige de substantialité (*thinghood*) dans cette forme.

Le même raisonnement peut encore s'énoncer comme suit : Si nous abstrayons le concept de l'extériorité, et que nous essayions de le traiter en lui-même, il est évident que nous obtiendrons forcément un objet dénué à la fois d'éléments et de totalité. Car nous avons fait abstraction de la matière diverse qui remplissait cette forme, tandis qu'un élément ou un tout quelconque retiendrait quelques-unes des qualités de la matière. Un élément ou un tout, en effet, devrait être une chose non extérieure à elle-même, et contiendrait par suite quelque chose qui ne serait pas pure extériorité. De là naît, dans la recherche des éléments, la divisibilité à l'infini, avec la notion contradictoire du point, et, dans la recherche d'un tout complet, l'idée d'une étendue illimitée, avec la contradiction d'une régression infinie ou d'un cercle vicieux. Par là encore,

([1]) Chap. IV, § 201 et suivants.

notre forme ne contient ni des éléments, ni une totalité, mais seulement des relations sans fin, les termes de ces relations étant exclus par l'abstraction qu'on a faite de la matière qui remplit cette forme.

130. Nous pouvons déduire de la même manière l'homogénéité de cette forme. On a fait abstraction de la diversité du contenu, qui n'était possible que dans la forme d'extériorité, et l'on n'a rien gardé que la pure possibilité de la diversité, le pur principe de différenciation, lui-même uniforme et non différencié. Car si la diversité présuppose une telle forme, la forme ne peut pas être elle-même diverse ou différenciée, à moins d'être contenue dans une autre forme.

On peut encore déduire la même propriété de la relativité de la position. Car si une position possédait une qualité quelconque qui la distinguât d'une autre, cette qualité serait nécessairement plus ou moins intrinsèque, et contredirait la pure relativité. Par suite, toutes les positions sont qualitativement semblables, c'est-à-dire que la forme est partout homogène.

131. De ce qui a été dit de l'homogénéité et de la relativité résulte une des plus étranges propriétés d'une forme d'extériorité. Cette propriété consiste en ce que la relation d'extériorité entre deux choses quelconques est divisible à l'infini, et peut être regardée, en conséquence, comme composée d'un nombre infini de prétendus éléments de cette forme, ou encore comme la somme de deux relations d'extériorité [1]. Parler de diviser ou d'additionner des relations peut bien paraître absurde; en réalité, cela montre l'impropriété du mot *relation* dans ces locutions. Et pourtant il est difficile de trouver une

---

[1] Il importe cependant de remarquer que cette manière d'envisager la relation spatiale implique, comme la définition du point, la notion de tout et de partie; du point de vue purement projectif, la relation entre deux points est toute la ligne droite illimitée sur laquelle ils se trouvent, et n'a pas besoin d'être regardée comme divisible en parties ou comme composée de points.

expression qui soit moins impropre. En fait, il semble que l'extériorité ne soit pas tant une relation qu'une pure relativité, ou la pure possibilité d'une relation. Je m'étendrai sur ce sujet dans le Chapitre IV [1]. A présent, il importe seulement de remarquer (ce qui sera invoqué dans le raisonnement suivant) que la relation (si l'on peut l'appeler ainsi) d'extériorité entre deux ou plusieurs choses doit être capable d'un changement continu, puisque notre forme est homogène, et de division à l'infini, puisque notre forme divisible à l'infini est constituée par de telles relations. Or le résultat de la division à l'infini est défini comme l'élément de notre forme. (Notre forme n'a pas d'éléments, mais on doit imaginer des éléments pour pouvoir raisonner sur elle, comme on le montrera plus complètement dans le Chapitre IV.) Il s'ensuit que toute relation d'extériorité peut être regardée, pour les besoins de la Science, comme une collection infinie d'éléments, bien qu'au point de vue philosophique les relations seules soient valables, et que les éléments soient le résultat contradictoire de la substantialisation de la forme d'extériorité. Cette manière d'envisager les relations d'extériorité est importante pour comprendre la signification d'idées telles que celles de trois ou quatre points en ligne droite.

Comme ce point est difficile et important, je vais répéter, avec un peu plus de détails, l'explication de la manière dont les lignes droites et les plans arrivent à être regardés comme des collections de points. Du point de vue strictement projectif, alors que toutes les autres figures *sont* simplement des collections d'un nombre aussi grand qu'on veut de points, de lignes ou de plans donnés par une construction projective, les lignes droites et les plans eux-mêmes sont donnés intégralement, et ne doivent pas être considérés comme divisibles ou composés de parties. Dire qu'un point se trouve sur une ligne droite signifie, pour la Géométrie projective pure, que la ligne droite est une relation entre ce point et un autre point quelconque.

---

[1] §§ 207, 208. *Cf.* HEGEL, *Naturphilosophie*, § 254.

Dans ce cas, si l'on veut que notre énoncé soit exempt de contradiction, il faut regarder les points en question comme des points *réels* (si l'on peut employer une telle expression), c'est-à-dire comme des centres matériels inétendus ([1]). Les lignes droites et les plans sont alors des relations entre ces atomes matériels. Mais ce sont des relations qui peuvent subir un changement métrique, tout en restant projectivement invariables. Lorsque la relation projective des deux points A, B est la même que celle des deux points A, C, tandis que la relation métrique (distance) est différente, les trois points A, B, C sont dits *être en ligne droite*. Or la manière métrique de considérer les figures spatiales exige qu'elles soient substantialisées, et qu'elles ne soient plus regardées comme de pures relations. Car quand on regarde une grandeur comme extensive, c'est-à-dire comme divisible en parties, on la regarde nécessairement comme quelque chose de plus qu'une pure relation ou attribut, puisque aucune relation pure ou attribut ne peut être divisé. Il faut donc substantialiser les relations spatiales, pour les traiter quantitativement ([2]). Cela fait, on obtient, nous l'avons vu ci-dessus, une forme d'extériorité homogène et divisible à l'infini. On trouve alors que la distance, par exemple, peut varier d'une manière continue sans changer la ligne droite sur laquelle elle est mesurée. On obtient ainsi, sur la ligne droite en question, une série continue de points qui, puisqu'elle est continue, est considérée comme constituant cette ligne droite. C'est uniquement de cette substantialisation des relations, exigée par la Géométrie métrique, que naît la conception des lignes droites et des plans comme *composés* de points, et c'est d'elle aussi que naissent les difficultés de la Géométrie métrique.

132. L'idée des *dimensions* nous fait franchir une nouvelle étape dans la définition d'une forme d'extériorité. Les posi-

---

([1]) *Voir* Chap. IV, §§ 196-199.

([2]) *Voir* notre article sur *Les rapports du nombre et de la grandeur*, dans le *Mind* (juillet 1897).

tions, on l'a vu, sont définies uniquement par leurs relations à d'autres positions. Mais pour qu'une telle définition soit possible, il faut qu'un nombre fini de relations soit suffisant, puisque des nombres infinis sont philosophiquement inadmissibles. Si donc la connaissance de notre forme doit être possible, il faut qu'une position puisse se définir par un nombre entier fini de relations avec d'autres positions. Chacune des relations nécessaires pour cette définition s'appellera une *dimension*. Nous obtenons ainsi cette proposition : *Toute forme d'extériorité doit avoir un nombre entier fini de dimensions*.

133. Le raisonnement précédent, peut-on objecter, a négligé une possibilité. Un adversaire pourrait prétendre qu'on a employé un argument transcendantal, sans prouver suffisamment que la connaissance d'une extériorité doit être possible sans aucune référence aux contenus extérieurs les uns aux autres. La définition d'une position peut être impossible tant que l'on néglige la matière qui remplit la forme, mais peut devenir possible lorsqu'on tient compte de cette matière. On peut, je crois, répondre avec succès à cette objection en s'appuyant sur la passivité et l'homogénéité de notre forme. Car si la définition de la position dépendait de la matière particulière qui occupe cette position, cela impliquerait une sorte d'action réciproque entre la matière et sa position, ou une réaction du contenu varié sur la forme homogène. Mais puisque la forme est totalement dépourvue de substantialité, parfaitement impassible, et entièrement dépourvue de différence entre ses parties, une telle réaction est inconcevable. Une réaction sur la position devrait l'altérer en quelque manière; mais comment pourrait-elle être altérée? Elle n'a pas de qualités, si ce n'est celles qui en font la position qu'elle est, par opposition aux autres positions; elle ne peut donc pas changer sans devenir une position différente. Or un tel changement contredit le principe d'identité. Ce n'est donc pas la position qui a changé, mais le contenu qui s'est déplacé dans la forme. Dès lors, si l'on peut obtenir une connaissance quelconque de notre forme, il faut qu'on puisse l'obtenir de telle sorte qu'elle soit logiquement indépen-

dante de la matière particulière qui remplit la forme. Par conséquent, une fois admise la possibilité de la connaissance dans le domaine en question, le raisonnement précédent établit la nécessité d'un nombre entier fini de dimensions.

134. Reprenons notre argument primitif à la lumière de ces explications. Une position n'est complètement définie que lorsqu'on connaît un nombre suffisant de relations pour pouvoir déterminer sa relation avec n'importe quelle autre position connue. Une telle définition ne peut être fondée que sur des relations intérieures à la forme d'extériorité, comme nous venons de le voir, et jamais sur des relations qui impliqueraient une référence à la matière particulière qui remplit la forme. Mais la possibilité d'une telle définition résulte du principe du milieu exclu, lorsqu'on interprète ce principe dans le sens où Bosanquet le fait, à savoir que « la Réalité... est un système de parties réciproquement déterminées [1] ». Car cela suppose que, étant données les relations d'une partie A avec d'autres parties B, C, ..., un nombre suffisamment grand de telles relations détermine les relations de B avec C, etc. S'il n'en était pas ainsi, on ne pourrait pas dire que les parties A, B, C, ... forment un système; car, dans un tel système, définir A, c'est définir en même temps tous les autres membres, et donner un attribut à A, c'est donner un attribut à B et à C. Mais lorsqu'on rétablit la matière dont on a fait abstraction pour ne considérer que les positions, les relations entre des positions deviennent des relations entre les choses qui occupent ces positions, et ces relations, nous l'avons vu, peuvent être étudiées sans référence à la nature particulière que possèdent, à d'autres égards, les termes de ces relations. Il en résulte que, si l'on applique le principe général de l'unité systématique à ces relations en particulier, on trouve que ces relations dépendent les unes des autres, puisque leur définition ne dépend d'aucune autre chose. Ainsi l'axiome des dimensions, sous la forme générale énoncée ci-dessus, est la conséquence, dans le

(1) *Logic*, Vol. II, Chap. VII, p. 211.

domaine géométrique abstrait, de la relativité de la position et du principe du milieu exclu.

135. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'examiner le cas particulier remarquable où une forme d'extériorité n'a qu'une dimension. Des deux formes d'extériorité fournies par l'expérience, l'une, à savoir le temps, offre un exemple de ce cas particulier. Mais on peut montrer, je crois, qu'une seule forme à une dimension ne pourrait pas remplir la fonction que nous exigeons d'elle pour établir la possibilité de l'expérience. En effet, dans une forme à une dimension, les divers contenus ne peuvent être ordonnés qu'en série, et ne peuvent pas changer leur ordre dans la série sans se pénétrer mutuellement. Mais cela leur est impossible, puisqu'une forme d'extériorité est simplement l'expression de la diversité des choses; d'où il suit que des choses ne peuvent pas occuper la même position dans une forme, à moins qu'il n'y ait une autre forme pour les différencier. Car là où il n'y a pas d'extériorité, il n'y a pas de diversité (¹). Ainsi deux corps peuvent occuper le même espace, mais seulement en des temps différents; deux choses peuvent exister simultanément, mais seulement en différentes places. Une forme à une dimension ne peut donc pas, par elle-même, permettre ce changement des relations d'extériorité, qui seul peut nous donner conscience d'un monde varié de choses en relation réciproque.

136. A ce raisonnement, on peut objecter que sa validité dépend de la supposition que le changement d'une relation d'extériorité est nécessairement continu. Il paraît presque impossible soit de poser, soit de lever cette objection, d'une manière qui n'implique pas le temps. Car on ne peut parler d'un changement, continu ou discontinu, sans imaginer le temps. Admettons donc que le temps soit connu, et examinons si le

(¹) Nous entendons dans tout ceci la diversité réelle, par opposition à la diversité logique. Des attributs divers peuvent coexister dans une chose en même temps et au même lieu, mais deux choses réelles différentes ne peuvent pas coexister de cette manière.

changement temporel, dans une autre forme d'extériorité, est nécessairement continu ([1]). Il faut répondre, je crois, que la continuité est nécessaire. Le changement de relation, dans notre forme non temporelle, peut être décrit, sans danger de malentendu, comme un mouvement, et l'on peut appliquer à ce mouvement le principe de causalité, puisqu'on a déjà admis le temps. Il en résulte alors qu'un mouvement discontinu impliquerait un effet fini provenant d'une cause infiniment petite, car une cause qui n'agirait que pendant un moment serait infiniment petite. Cela implique aussi que l'instant a une valeur absolue, tandis que ce qui, dans une forme quelconque d'extériorité, a une valeur réelle, ce n'est pas, comme nous l'avons déjà vu, l'élément infinitésimal et contradictoire qui résulte de la division à l'infini, mais la relation finie que l'analyse mathématique résout en éléments évanouissants. Il faut donc que le changement soit continu, et la possibilité d'un arrangement en série subsiste entière.

Le même argument vaut nécessairement pour une forme à une dimension autre que le temps. Car quelque chose d'analogue à la causalité serait nécessaire à l'expérience, et la relativité de la forme serait encore nécessairement valable. Par suite, puisqu'on n'a invoqué que ces deux propriétés du temps, la démonstration précédente resterait valable pour toute seconde forme dont les relations correspondraient à celles de la première, comme l'analogue de la causalité exigerait qu'elles le fussent.

137. L'étape suivante de notre raisonnement, où l'on admet deux ou plusieurs dimensions, est relative aux corrélatifs généraux de la ligne droite et du plan, c'est-à-dire aux figures uniquement déterminées par deux ou par trois positions (qu'on les regarde comme des relations entre des positions ou comme des séries de positions). Si l'on peut franchir avec succès cette nouvelle étape, notre déduction des axiomes projectifs énoncés ci-dessus sera complète, et la Géométrie descriptive sera établie comme la science abstraite *a priori* des formes d'extériorité.

([1]) Sur l'insuffisance du temps seul, *voir* Chap. IV, § 191.

Pour prouver cette assertion, considérons de quelle nature peuvent être les relations par lesquelles on définit les positions. Nous avons déjà vu que notre forme est purement relative et divisible à l'infini, et que les positions (points) sont le résultat contradictoire de la recherche de quelque chose d'autre que des relations. Aussi, ce que nous entendons réellement par les relations qui définissent une position, ce sont, en défaisant notre abstraction précédente, les relations d'extériorité qui mettent une chose en relation avec d'autres choses. Mais comment de telles relations doivent-elles apparaître, lorsque nous restons dans la forme abstraite?

138. Nous avons à prouver que deux positions doivent avoir une relation indépendante de toute référence à d'autres positions. Pour le prouver, rappelons ce qui a été dit, à propos des dimensions, sur la passivité et l'homogénéité de notre forme. Puisque les positions ne sont définies que par des relations, il faut qu'il y ait dans cette forme des relations entre les positions. Mais s'il y a de telles relations, il faut qu'il y ait une relation intrinsèque entre deux positions. Car admettre le contraire, ce serait supposer en quelque sorte une action réciproque ou une connexion causale entre ces deux positions et d'autres positions, supposition que la parfaite homogénéité de notre forme rend absurde, puisque toutes les positions sont qualitativement semblables, et ne peuvent changer sans perdre leur identité. Nous pouvons mettre cet argument sous la forme suivante : Puisque les positions ne sont définies que par leurs relations, une telle définition ne pourrait jamais commencer, si elle ne commençait pas par une relation entre deux positions seulement. Supposons, en effet, que trois positions A, B, C soient nécessaires, et qu'elles donnent naissance à la relation *abc* entre elles trois. Il ne resterait alors aucun moyen de définir les différents couples BC, CA, AB, puisque la seule relation qui les définisse serait commune aux trois couples. On ne gagnerait rien, dans ce cas, à les rapporter à de nouveaux points, car, de l'homogénéité et de la passivité de la forme, il résulte que ces nouveaux points ne peuvent affecter les rela-

tions internes de notre triade; si donc ces relations peuvent lui donner un caractère défini quelconque, elles doivent le lui donner sans l'aide d'aucune référence extérieure. Par conséquent, pour que la définition soit possible, il faut que deux positions aient quelque relation qu'elles suffisent par elles-mêmes à définir. Un raisonnement exactement semblable s'applique à trois dimensions, ou à quatre; l'argument ne perd sa valeur que lorsqu'on a épuisé les dimensions de la forme considérée. Ainsi, dans trois dimensions, cinq positions n'ont aucune relation nouvelle, qui ne puisse se déduire de celles que l'on connaît déjà, car, en vertu de la définition des dimensions, toutes les relations impliquées dans ces cinq points peuvent se déduire de celles qui relient le quatrième aux trois premiers, jointes à celles qui relient le cinquième aux trois premiers.

On peut donner à cet argument une forme plus concrète, et peut-être plus convaincante, en considérant la matière ordonnée dans notre forme. Si deux objets sont extérieurs l'un à l'autre, il faut qu'ils aient quelque relation d'extériorité, puisqu'ils appartiennent au même monde; il existe donc une relation d'extériorité entre deux objets. Mais puisque notre forme est homogène, une relation d'extériorité exactement semblable peut subsister en d'autres parties de la forme, c'est-à-dire pendant que les deux objets considérés changent de relations d'extériorité avec les autres choses. La relation d'extériorité entre deux choses est donc indépendante des autres choses. Par conséquent, pour revenir au langage abstrait de la forme, deux positions ont une relation déterminée par ces deux positions seules, et indépendante des autres positions.

Un argument exactement semblable s'applique aux relations de trois positions, et, dans chaque cas, la relation ne peut apparaître dans la forme comme une simple inférence tirée des positions qu'elle relie. Car, comme nous l'avons vu, une forme d'extériorité est constituée par des relations actuelles, et celles-ci ne sont pas de simples inférences tirées de termes qu'on ne peut trouver nulle part dans la forme (1).

(1) Géométriquement, l'axiome du plan affirme, non pas que trois points

En résumé, puisque la position est relative, il faut que deux positions aient *quelque* relation l'une avec l'autre; et puisque notre forme d'extériorité est homogène, cette relation peut rester invariable pendant que les deux positions changent de relations avec les autres positions. Par suite, leur relation est intrinsèque et indépendante des autres positions. Puisque la forme est un pur complexe de relations, si la forme est sensitive ou intuitive, il faut que la relation en question soit elle-même sensitive ou intuitive, et non une simple inférence. Dans ce cas, il faut qu'une relation unique soit une figure unique, c'est-à-dire, en termes spatiaux, la ligne droite qui joint les deux points.

139. Par là se trouve achevée notre déduction de la Géométrie projective à partir des propriétés conceptuelles *a priori* d'une forme d'extériorité. Qu'une telle forme soit contradictoire, quand on la regarde comme une chose indépendante, c'est ce qui ressort évidemment de toute cette discussion. Mais la science de la forme a été fondée sur une manière toute contraire de la considérer : on l'a constamment regardée comme un simple complexe de relations, et l'on a déduit ses propriétés exclusivement de cette manière de voir. Il faut renvoyer au Chapitre IV les nombreuses difficultés qui s'élèvent quand on applique une telle déduction *a priori* à l'espace intuitif, et quand on explique comme des nécessités logiques des propriétés qui apparaissent comme des données sensitives ou intuitives. Pour le moment, je veux faire ressortir que la Géométrie projective est entièrement *a priori;* qu'elle traite un objet dont les propriétés sont logiquement déduites de sa définition, et non induites de données empiriques; que sa définition, en outre,

---

déterminent une figure quelconque, ce qui résulte de l'axiome de la ligne droite, mais que les points communs à deux plans forment une ligne droite, ou, ce qui revient au même, que la ligne droite qui joint deux points d'un plan est contenue tout entière dans ce plan. On obtient ainsi une double définition de la ligne droite, comme figure déterminée par deux plans ou par deux points. Cette double définition est essentielle à la Géométrie projective, comme on peut le voir en se reportant à l'exposé précédent de la construction du quadrilatère (§ 113). (Cette Note a été substituée par l'auteur à la Note des pages 144, 145 et 146 du Livre anglais.)

est fondée sur la possibilité d'avoir l'expérience d'une diversité d'objets en relation, ou d'une multiplicité dans une unité : et que cette science tout entière, par suite, est logiquement impliquée dans la possibilité d'une telle expérience, et peut s'en déduire.

140. Dans la Géométrie métrique, au contraire, nous trouverons un résultat tout différent. Bien que les conditions géométriques qui rendent possible la mesure spatiale doivent se trouver identiques aux axiomes *a priori* discutés ci-dessus, à part de légères différences dans la forme de l'énoncé, la mesure réelle (qui porte sur l'espace réellement donné, et non sur la pure construction intellectuelle que nous venons d'étudier) donne des résultats qui ne peuvent être connus qu'empiriquement et approximativement, et qui ne peuvent être déduits par aucune nécessité logique. Les espaces euclidien et non-euclidiens donnent les divers résultats qui sont possibles *a priori*; les axiomes propres à Euclide (qui ne sont pas proprement des axiomes, mais des résultats empiriques de la mesure) déterminent, dans la limite des erreurs d'observation, celle de ces possibilités *a priori* qui est réalisée dans notre espace actuel. Ainsi la mesure s'applique constamment à une matière empiriquement donnée, et non à une création de l'entendement, et ses éléments *a priori* ne sont que les conditions présupposées dans la possibilité de la mesure. Quelles sont ces conditions? c'est ce que nous allons voir dans la seconde section de ce Chapitre.

SECTION B.

LES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE.

---

141. Nous venons de passer en revue les axiomes de la Géométrie, et nous avons vu qu'ils sont déduits *a priori* du fait que nous pouvons avoir l'expérience d'une extériorité, c'est-à-dire d'une multiplicité coexistante des choses différentes mais en

corrélation. Mais la Géométrie projective, malgré ses prétentions, n'est pas toute la science de l'espace, comme le prouve suffisamment le fait qu'elle ne peut pas distinguer les espaces euclidien et non-euclidiens ([1]). A cette fin, la mesure spatiale est nécessaire; la Géométrie métrique, avec ses moyens de contrôle quantitatifs, peut seule effectuer cette distinction. Pour toute application de la Géométrie à la Physique, la mesure est encore nécessaire; la loi de la gravitation, par exemple, postule la détermination de distances actuelles. Bref, la Géométrie projective est tout à fait insuffisante à beaucoup d'égards : c'est ainsi qu'elle est incapable de distinguer les différentes espèces de coniques, bien que cette distinction soit d'une importance capitale dans plusieurs branches de la Science.

La Géométrie métrique est donc une partie nécessaire de la science de l'espace, et une partie non comprise dans la Géométrie descriptive. Néanmoins, son élément *a priori*, en tant qu'il est spatial et non arithmétique, est le même que le postulat de la Géométrie projective, à savoir l'homogénéité de l'espace, ou son équivalent, la relativité de la position. On peut prévoir, en fait, que l'élément *a priori* des deux Géométries sera probablement le même. Car l'*a priori* en Géométrie métrique sera ce que présuppose la possibilité de la mesure spatiale, c'est-à-dire d'une comparaison spatiale quantitative. Or une telle comparaison présuppose simplement une identité connue de qualité, dont la détermination constitue précisément le problème de la Géométrie projective. Par suite, les conditions de la possibilité de la mesure, en tant qu'elles ne sont pas arithmétiques, seront précisément les mêmes que celles de la Géométrie projective.

142. Par conséquent, la Géométrie métrique, quoique distincte de la Géométrie projective, n'en est pas indépendante.

([1]) On en a donné ci-dessus une démonstration détaillée (Chap. I, 3e période). On doit remarquer que toute référence à des éléments infiniment éloignés implique des idées métriques.

mais la présuppose; elle provient de l'union de celle-ci avec l'idée étrangère de *grandeur*. Néanmoins la forme mathématique des axiomes, en Géométrie métrique, est légèrement différente de leur forme en Géométrie projective. L'homogénéité de l'espace est remplacée par son équivalent, l'axiome de libre mobilité. L'axiome de la ligne droite est remplacé par l'axiome de la distance: deux points déterminent une grandeur unique, la distance, qui reste invariable dans tout mouvement des deux points considérés comme une figure simple. On trouve, à la vérité, que cet axiome implique celui de la ligne droite (car une telle grandeur ne peut exister que si les deux points déterminent une courbe unique), mais sa forme mathématique est différente. Un autre changement important est la disparition du principe de dualité : la grandeur peut s'appliquer à la ligne droite, parce qu'elle est divisible en parties semblables, mais elle ne peut pas s'appliquer au point indivisible. On obtient ainsi une raison, qui faisait défaut en Géométrie descriptive, pour préférer les points aux lignes droites ou aux plans, comme éléments spatiaux ([1]). Enfin, une idée entièrement nouvelle s'introduit avec la grandeur, à savoir l'idée de *mouvement*. Cela ne veut pas dire que nous étudiions le mouvement, ni qu'aucun de nos résultats se rapporte au mouvement, mais qu'on ne peut pas les obtenir, comme en Géométrie projective, sans un mouvement au moins idéal des figures dans l'espace.

Examinons maintenant en détail les conditions nécessaires de la mesure spatiale. Nous trouverons trois axiomes, sans lesquels cette mesure serait impossible, mais avec lesquels on est en état de décider, d'une manière empirique et approximative, si notre espace actuel est euclidien ou non-euclidien. Nous trouverons, en outre, que ces trois axiomes peuvent se déduire de la notion d'une forme d'extériorité, et ne doivent rien à l'évidence de l'intuition. Ils sont donc *a priori*, comme leurs équivalents les axiomes de la Géométrie projective, et peuvent se déduire des conditions de l'expérience spatiale. Par consé-

---

([1]) *Cf.* section A, §§ 115-117.

quent, cette expérience ne peut jamais les infirmer, puisque son existence même les présuppose.

I. L'axiome de libre mobilité.

143. On peut définir, en commençant, la Géométrie métrique, comme la science qui traite de la comparaison et des relations des grandeurs spatiales. Le concept de grandeur est donc nécessaire dès le début. C'est pourquoi l'on a classé quelques-uns des axiomes d'Euclide parmi les axiomes arithmétiques, et l'on a cru qu'ils n'avaient aucune relation particulière avec l'espace. Tels sont les axiomes : « Des quantités égales ajoutées ou retranchées à des quantités égales donnent des résultats égaux » et : « Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles ». Ces axiomes, a-t-on dit, sont purement arithmétiques, et n'expriment pas, comme les autres, un attribut de l'espace. Cela est naturellement vrai pour leur emploi en Arithmétique. Mais, pour qu'on puisse appliquer un axiome arithmétique aux grandeurs spatiales, il faut qu'il ait quelque signification spatiale (1), et, par conséquent, les axiomes de cette classe même ne sont pas *purement* arithmétiques en Géométrie. Heureusement, l'élément géométrique est le même dans tous les axiomes de cette classe : on peut voir, en effet, d'abord, qu'il ne consiste en rien de plus qu'un criterium de la grandeur spatiale (2). De plus, puisque l'espace dont s'occupe la Géométrie est divisible à l'infini, un criterium de la grandeur spatiale se réduit lui-même à un criterium de l'égalité spatiale, car, dès que l'on possède celui-ci, on peut comparer deux grandeurs spatiales en les divisant chacune en un certain nombre d'unités égales, et en comptant le nombre de ces unités contenu dans chacune d'elles (3). Le rapport du nombre des unités est évidemment le rapport des deux grandeurs.

---

(1) *Voir*, par opposition, ERDMANN, *op. cit.*, p. 138.

(2) *Cf.* ERDMANN, *op. cit.*, p. 164.

(3) Strictement parlant, cette méthode n'est applicable que quand les deux grandeurs sont commensurables. Mais, si nous prenons la divisibilité

141. Ainsi l'on postule, dès le début même, un criterium de l'égalité spatiale : sans un tel criterium, la Géométrie métrique deviendrait tout à fait impossible. Il peut sembler, à première vue, que ce criterium n'ait pas besoin d'être un axiome, mais puisse être une simple définition. Ce n'est cependant pas le cas. L'égalité est une notion générale qui n'est pas particulière à l'espace, mais qui a une extension égale à celle de la grandeur. En outre, l'égalité est un concept fondamental, simple, et, par suite, indéfinissable. Par conséquent, tout criterium de l'égalité est, non pas une définition, mais une proposition qui peut être vraie ou fausse. Une partie de ce criterium est donnée dans le VIII[e] axiome d'Euclide : « Les grandeurs qui coïncident exactement sont égales. » Mais cela ne fournit un criterium suffisant que lorsque les grandeurs à comparer occupent déjà la même position. Dans le cas normal, où les deux grandeurs spatiales sont extérieures l'une à l'autre (et c'est nécessairement le cas si elles sont distinctes, et non dans le rapport du tout à la partie), les deux grandeurs ne peuvent être amenées à coïncider que par un mouvement de l'une d'elles ou des deux. Par suite, pour que notre criterium de la grandeur spatiale puisse donner des résultats non équivoques, si les deux figures superposées peuvent coïncider une fois, il faut qu'elles coïncident toujours, quel que soit le chemin suivi pour les y amener. Si donc le simple mouvement pouvait altérer les formes, notre criterium de l'égalité serait ruiné. Il s'ensuit que l'application du concept de grandeur aux figures de l'espace implique l'axiome suivant [1] : *Les grandeurs spatiales peuvent être déplacées sans déformation,* ou, comme on peut encore l'énoncer : *Les formes ne dépendent en aucune manière de la position absolue dans l'espace.*

L'axiome précédent est l'*axiome de libre mobilité* [2]. Je

---

infinie à la rigueur, les unités peuvent théoriquement être prises assez petites pour obtenir un tel degré d'approximation qu'on veut. La difficulté se réduit à la difficulté générale qu'on a à appliquer aux continus le concept essentiellement discontinu du nombre.

(1) *Cf.* ERDMANN, *op. cit.*, p. 50.

(2) Aussi appelé *axiome de congruence*. Mais, comme j'ai pris la con-

me propose de prouver : 1° que la négation de cet axiome impliquerait des absurdités logiques et philosophiques, de sorte qu'il doit être regardé comme entièrement *a priori*; 2° que, si l'on n'admettait pas cet axiome, la Géométrie métrique serait incapable d'établir, sans une absurdité logique, la notion d'une grandeur spatiale quelconque. La conclusion sera que cet axiome ne peut être ni prouvé ni infirmé par l'expérience, mais qu'il est une condition *a priori* de la Géométrie métrique. Puisque je suis amené à soutenir une thèse qui a été fort controversée, spécialement par Helmholtz et Erdmann, je devrai donner à mes arguments un certain développement.

145. **A. Argument philosophique.** — La négation de l'axiome implique la position absolue, et, partant, une action du pur espace, par lui-même, sur les choses. En effet, l'axiome n'affirme pas, comme un fait empirique, que les corps réels ne changent jamais de forme en aucune manière en passant d'un lieu à un autre; au contraire, nous savons que de tels changements se produisent, quelquefois dans une mesure notable, et toujours à quelque degré. Mais on attribue ces changements, non au changement de lieu comme tel, mais à des causes physiques, telles que les changements de température, de pression, etc. Notre axiome porte, non sur des corps matériels réels, mais sur des figures géométriques [1], et il affirme qu'une figure qui est possible dans une position quelconque de l'espace est possible dans n'importe quelle autre. Sa signification deviendra plus claire si l'on se reporte à un cas où il ne vaut pas : par exemple, à l'espace formé par la surface d'un œuf. Ici, un triangle tracé près de l'équateur ne peut pas se déplacer sans déformation vers la pointe, car il ne s'adapterait plus à la courbure plus grande de la nouvelle position; un triangle tracé près de la pointe ne peut pas s'adapter au gros bout, plus plat, et ainsi de suite. Ainsi la méthode de superposition, telle

---

gruence pour criterium de l'égalité spatiale par superposition, je considérerai en général comme *axiome* la libre mobilité.

[1] Pour le sens dans lequel ces figures doivent être regardées comme matérielles, *voir* notre critique de Helmholtz, Chap. II, §§ 69 et suiv.

qu'Euclide l'emploie dans le Livre I, prop. IV, devient impossible; les figures ne peuvent pas se mouvoir librement : en effet, étant donnée une figure quelconque, on peut déterminer pour elle, sur l'œuf, une certaine série de positions possibles, hors desquelles elle devient impossible. Or ce que j'affirme, c'est qu'il y a une absurdité philosophique à supposer que l'espace, en général, soit de cette nature. Sur l'œuf, nous avons des points marqués, tels que les deux bouts; l'espace formé par sa surface n'est pas homogène, et si les choses se meuvent sur elles, il faut qu'il exerce de lui-même sur elles une action déformatrice, indépendamment de toute cause physique; et s'il n'exerçait pas une telle action, les choses ne pourraient pas se déplacer. Ainsi un espace semblable ne serait pas homogène; il aurait des points marqués, par rapport auxquels les corps auraient une position absolue, indépendamment de tous les autres corps. L'espace ne serait plus passif, il exercerait une action définie sur les choses, et nous devrions nous accommoder à la notion de points marqués dans l'espace vide, ces points étant marqués, non par les corps qui les occupent, mais par leurs effets sur tous les corps qui peuvent de temps en temps les occuper. Mais ce manque d'homogénéité et de passivité est absurde; puisque l'espace est une forme d'extériorité, il ne peut admettre que des positions relatives, et non absolues, et il doit être complètement homogène d'un bout à l'autre. Le concevoir autrement, c'est lui attribuer une réalité qu'aucune forme d'extériorité ne peut posséder. Ainsi, pour des raisons purement philosophiques, il faut admettre qu'une figure géométrique qui est possible quelque part est possible partout, ce qui est l'axiome de libre mobilité.

146. **B. Argument géométrique.** — Voyons maintenant quelle espèce de Géométrie on pourrait construire sans cet axiome. Comme nous l'avons vu en introduisant l'axiome, il faut que l'étalon ultime de comparaison des grandeurs spatiales soit l'égalité, quand elles sont superposées; mais de cette égalité doit-on inférer leur égalité quand elles sont séparées? Erdmann a objecté que cela serait inutile, pour les besoins les

plus immédiats de la Géométrie ([1]). On peut, croit-il, construire une nouvelle Géométrie, où les grandeurs varieraient avec le mouvement suivant une loi définie. Cette opinion, comme je le montrerai plus loin, implique une erreur logique touchant la nature de la grandeur spatiale. Mais, avant de le montrer, discutons les conséquences géométriques qui en résultent quand on l'admet comme vraie. Supposons que la longueur d'un arc infiniment petit soit ds dans une position-étalon; alors, dans une autre position p, sa longueur sera $ds.f(p)$, où la forme de la fonction $f(p)$ est nécessairement supposée connue. Mais comment fera-t-on pour déterminer la position p? A cette fin, on aura besoin des coordonnées de p, c'est-à-dire d'une mesure de sa distance à l'origine. Or cette distance à l'origine ne peut être mesurée que si l'on admet notre loi $f(p)$ pour la mesurer. En effet, supposons que l'origine soit O, et soit Op une ligne droite dont on demande la longueur. Si l'on a une règle graduée avec laquelle on arpente cette ligne et l'on en mesure les arcs infinitésimaux successifs, la règle changera de grandeur en se déplaçant, de telle sorte qu'un arc qui paraît, à la mesure, être ds, sera réellement $f(s)ds$, s étant la distance antérieurement parcourue. Si, d'autre part, on déplace lentement la ligne Op en la faisant passer par l'origine, et qu'on mesure chaque segment quand il y passe, notre mesure ne changera pas, il est vrai, mais alors nous n'aurons aucun moyen de découvrir la loi suivant laquelle chaque élément a changé de longueur en venant à l'origine. Donc, à moins de choisir arbitrairement notre fonction $f(p)$, nous n'avons aucun moyen de déterminer p, car on vient de voir que les distances à l'origine ne peuvent être évaluées qu'au moyen de la loi $f(p)$. Il s'ensuit que l'expérience ne peut ni prouver ni infirmer la constance des formes pendant le mouvement, puisque, si les formes n'étaient pas constantes, nous devrions *admettre* une loi pour leur variation avant que la mesure devînt possible et, par suite, la mesure ne pourrait pas elle-même nous révéler cette variation ([2]).

([1]) *Op. cit.*, p. 60.

([2]) L'opinion de Helmholtz et d'Erdmann, suivant laquelle l'expérience

Néanmoins, une telle loi, arbitrairement admise, *donne*, à première vue, une Géométrie mathématiquement possible. La proposition fondamentale, que deux grandeurs qui peuvent être superposées en une position quelconque peuvent être superposées en toute autre position, est encore valable. En effet, deux arcs infinitésimaux, dont les longueurs dans la position-étalon sont ds_1 et ds_2, auraient, dans une autre position p, des longueurs $f(p)\,ds_1$ et $f(p)\,ds_2$, de sorte que leur rapport resterait invariable. Or de la constance de ce rapport découle la proposition précédente, comme nous le savons par Riemann et Helmholtz. Donc tout ce que la Géométrie exige, semble-t-il, comme base de la mesure, est cet axiome, que le changement de forme pendant le mouvement suit une loi définie connue, telle que celle qu'on a admise ci-dessus.

147. Mais il y a dans cette thèse, comme je l'ai remarqué plus haut, une erreur logique touchant la nature de la grandeur spatiale. Cette erreur a été déjà mise en lumière en étudiant Erdmann [1]; il suffit de la rappeler brièvement ici. Un jugement de grandeur est essentiellement un jugement de comparaison : dans une grandeur non mesurée, cette comparaison porte simplement sur le plus ou le moins; mais dans une grandeur mesurée, elle porte sur le nombre de fois qu'une grandeur contient l'autre. Par suite, parler de différences de grandeur, dans un cas où la comparaison ne peut pas les révéler, est logiquement absurde. Or, dans le cas considéré ci-dessus, deux grandeurs qui paraissent égales dans une position paraissent encore égales lorsqu'on les compare dans une autre position. Si donc la superposition est l'unique criterium d'égalité spatiale, c'est un non-sens que de supposer que les deux grandeurs sont inégales une fois séparées, et que, conséquemment, elles ont changé de grandeur en se déplaçant. Cette absurdité de notre hypothèse est le principe logique de l'indétermination mathématique de la loi de variation. Donc, puisqu'il n'y a

---

mécanique suffirait, alors que l'expérience géométrique nous fait défaut, a été discutée ci-dessus, Chap. II, §§ 73, 82.

[1] Chap. II, § 81.

aucun moyen de comparer deux figures spatiales, sous le rapport de la grandeur, si ce n'est la superposition, le seul axiome logiquement possible, pour que la grandeur spatiale soit déterminée, est l'axiome de libre mobilité sous la forme donnée la première ci-dessus.

148. Quoique cet axiome soit *a priori*, son application à la mesure des corps réels implique toujours un élément empirique, comme nous l'avons vu en discutant les théories de Helmholtz (¹). Ainsi notre axiome fournit seulement la condition *a priori* pour effectuer une opération qui est empirique dans le concret, exactement comme l'Arithmétique fournit la condition *a priori* pour un recensement. Comme ce sujet a été longuement étudié dans le Chapitre II, je n'en dirai rien de plus ici.

149. Il nous reste cependant quelques objections et difficultés à discuter. En premier lieu, comment obtient-on l'égalité dans les solides, et, dans les exemples employés par Kant, de la main droite et de la main gauche, ou des hélices *dextrorsum* et *sinistrorsum*, où la superposition actuelle est impossible? En second lieu, comment peut-on prendre la congruence pour la seule base possible de la mesure spatiale, quand on a l'exemple du temps, où rien de pareil à la congruence n'est concevable? En troisième lieu, on peut alléguer que nous pouvons estimer immédiatement à l'œil l'égalité spatiale, avec plus ou moins d'exactitude, et avoir ainsi une mesure indépendante de la congruence. En quatrième lieu, comment la Géométrie métrique est-elle possible sur les surfaces non congruentes, si la congruence est la base de la mesure spatiale? Je vais discuter successivement ces objections.

150. 1° Comment mesurons-nous l'égalité des solides? Ils ne pourraient être amenés à coïncider réellement que si l'on avait une quatrième dimension où l'on pût opérer (²), et, d'après ce

---

(¹) Chap. II, § 72.

(²) *Voir*, par opposition, DELBOEUF, *L'ancienne et les nouvelles Géométries*, II, ap. *Rev. phil.*, vol. XXXVII, p. 354; 1894.

que j'ai dit auparavant de la nécessité absolue de ce criterium, il semble que nous soyons alors réduits à une ignorance complète. Euclide est muet sur ce sujet, et, dans tous les Traités de Géométrie, on admet comme évident que deux cubes de côté égal sont égaux. Ce fait donne à penser que nous ne sommes pas dans une aussi mauvaise position que celle où nous aurions été sans l'emploi de la congruence comme criterium de l'égalité dans une ou deux dimensions, car maintenant on peut au moins être sûr que ces deux cubes ont tous leurs côtés égaux et toutes leurs faces égales. Ces deux cubes ne diffèrent donc par aucune qualité spatiale sensible, sauf par la position, car le volume, en ce cas tout au moins, n'est pas une qualité sensible. Par suite, ils sont indiscernables pour ce qui est de ces qualités. S'ils échangeaient leurs places, on pourrait connaître ce changement par leur couleur ou par quelque autre propriété non géométrique; mais, pour ce qui est de toutes les propriétés dont la Géométrie peut connaître, toutes les apparences restent les mêmes qu'auparavant. Supposer alors une différence de volume, ce serait attribuer un effet à la pure position, ce qui est inadmissible, comme nous l'avons dit en discutant la Libre Mobilité. Ils sont donc géométriquement indiscernables, si ce n'est par la position, et nous pouvons appeler à notre aide l'*Identité des Indiscernables* ([1]) pour établir leur concordance à l'égard de la seule propriété restante, à savoir le volume. Il peut paraître un peu étrange d'employer ce principe en Mathématiques, et, pour la Géométrie, il vaut peut-être mieux regarder leur égalité comme une définition; mais si l'on demande une raison philosophique de cette définition, on ne la trouvera, je crois, que dans l'Identité des Indiscernables. On peut, sans erreur mathématique, faire reposer notre criterium de l'égalité à trois dimensions sur la congruence à deux dimensions. En effet, puisque la comparaison directe des volumes est impossible, on a la liberté de *définir* deux volumes comme égaux, lorsque toutes leurs diverses lignes, surfaces, angles et angles solides sont congruents, puisqu'il ne reste,

---

([1]) Principe métaphysique inventé par Leibnitz. (*Note de M. Couturat.*)

dans ce cas, aucune différence *mesurable* entre les figures qui composent les deux volumes. Naturellement, dès qu'on a établi ce seul cas de l'égalité des volumes, le reste de la théorie s'ensuit, comme le montre la méthode ordinairement employée pour intégrer les volumes, en les divisant en petits cubes.

Ainsi la congruence *aide* à établir l'égalité à trois dimensions, bien qu'elle ne puisse pas directement *prouver* une telle égalité; et le même principe philosophique, celui de l'homogénéité de l'espace, qui nous a servi à démontrer la congruence, vient encore ici à notre secours. Mais que dirons-nous des hélices *dextrorsum* et *sinistrorsum?* Nous ne pouvons plus employer ici l'Identité des Indiscernables, car les deux hélices sont parfaitement discernables. Mais, de même que pour les solides, la Libre Mobilité peut ici nous aider beaucoup. Elle peut nous permettre de montrer, par des mesures ordinaires, que les relations internes des hélices sont les mêmes, et que leur différence ne réside que dans leur relation à d'autres choses dans l'espace. Connaissant ces relations internes, on peut calculer par la Géométrie, que la Libre Mobilité a rendue possible, toutes les propriétés géométriques de ces hélices (rayon, pas, etc.), et l'on peut montrer qu'elles sont séparément égales dans les deux. Or c'est là tout ce que nous demandons. La comparaison médiate est possible, bien que la comparaison immédiate ne le soit pas. On peut, par exemple, comparer les deux hélices avec le cylindre sur lequel elles peuvent s'enrouler toutes deux, et l'on peut ainsi prouver leur égalité. Une démonstration toute semblable vaudrait naturellement pour les autres cas, celui de la main droite et de la main gauche, celui des triangles sphériques symétriques, etc. En somme, ces cas confirment mon raisonnement, car ils montrent, comme Kant le prétendait (¹), l'essentielle relativité de l'espace.

151. 2° En ce qui concerne le temps, aucune congruence

(¹) *Prolégomènes,* § 13. *Voir* VAIHINGER, *Commentar*, t. II, p. 518-532, spécialement p. 521-522. C'était là tout le dessein de Kant en 1768, mais une partie seulement de son dessein dans les *Prolégomènes*, où il voulait aussi prouver la nature intuitive de l'espace.

n'est concevable, car la congruence demande toujours, pour se réaliser, une dimension de plus que n'en comportent les grandeurs comparées, comme on l'a vu dans le cas de solides. Un jour ne peut pas être amené à coïncider dans le temps avec un autre jour, pour montrer que les deux se superposent exactement l'un à l'autre.

Mais l'exemple du temps est bien propre à faire ressortir la distinction des éléments *a priori* et empiriques dans l'emploi de la congruence ([1]). La partie purement *a priori* de cet axiome est celle qui affirme l'homogénéité de l'espace. De là il suit que les formes qui sont possibles quelque part sont possibles partout. En ce sens, le temps et l'espace sont sur le même plan. L'homogénéité du temps est aussi *a priori;* elle prouve qu'il peut y avoir égalité entre différentes périodes de temps, et que la position absolue dans le temps n'a aucun effet sur le contenu des choses ou événements. Mais l'emploi actuel de la congruence, pour la mesure spatiale, implique le mouvement, qui est nécessairement mouvement de matière, puisque l'espace ne peut pas se mouvoir. Ce criterium implique la connaissance, qui ne peut jamais être plus qu'empirique, de ce fait qu'un certain corps n'a pas changé de forme pendant le mouvement, ou n'en a changé que d'une certaine manière connue. De même, la comparaison actuelle de différentes portions du temps implique la continuation de quelque processus actuel suivant un cours uniforme; et l'uniformité d'un processus actuel ne peut être connue que par expérience. Ce qui est *a priori,* c'est la pure possibilité de cette uniformité, c'est-à-dire la connaissance qu'elle n'est pas empêchée par un simple changement de position absolue dans le temps.

Pour la mesure actuelle du temps, nous sommes donc réduits à admettre l'uniformité d'un certain mouvement ou système de mouvements qui nous est donné dans l'expérience. Heureusement, nous avons une ample collection de mouvements qui s'accordent tous approximativement : les oscillations du pendule, la rotation et la révolution de la Terre et

---

([1]) Cet alinéa a été ajouté par l'auteur. (*Note du traducteur.*)

des planètes, etc. Car ceux-ci ne s'accordent pas exactement, mais ils nous conduisent aux lois du mouvement, lesquelles nous permettent d'évaluer, dans notre hypothèse arbitraire, les petites quantités dont ils s'écartent du mouvement uniforme exactement comme l'hypothèse de la Libre Mobilité nous a permis de mesurer la quantité dont les corps actuels s'écartent de la rigidité. Mais, dans un cas comme dans l'autre, une autre hypothèse est mathématiquement possible, et ne peut être exclue qu'en raison de son absurdité philosophique; on aurait pu admettre que cet ensemble de mouvements qui s'accordent approximativement ont tous des vitesses qui varient approximativement suivant une certaine fonction du temps arbitrairement choisie, soit $f(t)$, comptée à partir d'une origine arbitraire. Une telle hypothèse leur conserverait un synchronisme aussi approximatif qu'auparavant, et donnerait un système de Mécanique également possible, quoique plus complexe; au lieu de la première loi du mouvement ([1]), on aurait la suivante : « Une molécule persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne avec une vitesse variant comme $f(t)$, à moins qu'elle ne soit forcée de changer cet état par l'action de forces extérieures. » Une telle hypothèse *est* mathématiquement possible, mais, comme l'hypothèse analogue pour l'espace, elle est exclue, au point de vue logique, par la nature comparative du jugement de grandeur, et, au point de vue philosophique, par le fait qu'elle implique le temps absolu comme agent déterminant du changement, tandis que le temps ne peut jamais, philosophiquement, être autre chose qu'une forme passive tirée par abstraction du changement réel. J'ai introduit ce parallèle emprunté au temps, non comme ayant une portée directe dans ma démonstration, mais comme un cas simple qui peut servir à illustrer mon raisonnement dans le cas plus complexe de l'espace. Car puisque le temps, en Mathématiques, est une grandeur à une dimension, les difficultés mathématiques sont plus simples ici qu'en Géométrie; et quoique rien n'y corresponde exactement à la congruence, il offre un mélange tout à

([1]) Le principe de l'inertie. (*Note du traducteur.*)

fait analogue de nécessité mathématique et philosophique, qui fournit, en fin de compte, un axiome complètement défini pour base de la mesure du temps, correspondant à la congruence comme base de la mesure de l'espace ([1]).

152. 3° L'exemple de la mesure du temps suggère la troisième des objections précitées contre la nécessité absolue de l'axiome de Libre Mobilité. La Psychophysique a montré que nous avons le pouvoir approximatif, au moyen de ce qu'on peut appeler le *sens de la durée*, d'estimer immédiatement l'égalité de courtes durées. Cela fournit une mesure grossière du temps, indépendante de toute supposition d'un mouvement uniforme; dans l'espace également, peut-on dire, nous avons un semblable pouvoir de comparaison immédiate. Nous pouvons voir, à la simple inspection, que les subdivisions d'un mètre ne sont pas trop inexactes; de cette manière, peut-on dire, nous avons du même coup un procédé de mesure indépendant de la congruence, et aussi le moyen de découvrir, par l'expérience, toute infraction notable à la Libre Mobilité.

Mais à cette thèse on peut faire tout d'abord une objection psychologique vraiment fondamentale. On a soutenu que toute comparaison de grandeurs spatiales procède par superposition idéale. Ainsi James dit ([2]) : « Même lorsque nous ne sentons que vaguement qu'une subdivision est plus grande ou plus petite, il faut que l'esprit passe rapidement de cette subdivision à l'autre, et ressente le choc sensible immédiat du plus, » et « en tant que les subdivisions d'un espace sensible doivent être *mesurées* exactement les unes par les autres, il faut que les formes objectives qui occupent une subdivision soient directement ou indirectement superposées à l'autre subdivision ([3]) ».

Mais, quand même nous renoncerions à cette objection fon-

([1]) Au sujet de la mesure du temps, *cf.* Bosanquet, *Logic*, t. I, p. 178-183. Comme le temps, dans l'exposé ci-dessus, est mesuré par le mouvement, sa mesure présuppose celle des grandeurs spatiales.

([2]) *Psychology*, t. II, p. 152.

([3]) *Cf.* Stumpf, *Ursprung der Raumvorstellung*, p. 68.

damentale, il en resterait d'autres. Et d'abord, de tels jugements d'égalité ne sont que des approximations très grossières, et ne peuvent pas être appliqués aux lignes qui dépassent une certaine longueur, quand ce ne serait que par cette raison que l'on ne peut pas bien voir de telles lignes ensemble. Ainsi cette méthode ne peut nous donner quelque sécurité que dans notre voisinage immédiat, et ne peut en aucune manière garantir des opérations comme celles qui seraient requises pour la construction des cartes, etc., et, bien moins encore, la mesure des distances astronomiques. Elle peut tout au plus nous permettre de dire que certaines lignes sont plus longues que d'autres, mais elle mettrait la Géométrie au même niveau que l'Arithmétique des plaisirs ([1]), où l'on est réduit à des mesures purement subjectives. En fait, cette méthode est reconnue si peu exacte, que le mètre est aussi nécessaire à la vie quotidienne qu'à la Science. D'ailleurs, personne ne se fierait à de tels jugements immédiats, si le criterium plus rigoureux de la congruence ne venait les confirmer en quelque mesure; mais si l'on ne pouvait pas employer ce criterium, on n'aurait aucune raison pour se fier à eux, même au degré où nous le faisons. Nous ne trouvons donc par là aucun moyen d'échapper à l'absolue dépendance où est la Géométrie à l'égard de l'axiome de Libre Mobilité.

153. 4° Un dernier éclaircissement est nécessaire pour que notre démonstration de cet axiome puisse être considérée comme complète. Nous avons parlé ci-dessus de la Géométrie sur un œuf, qui n'admet pas la Libre Mobilité. En quoi, peut-on me demander, une Géométrie qui exclurait entièrement la congruence serait-elle plus impossible que cette Géométrie de l'œuf? La réponse est facile. La Géométrie des surfaces non congruentes *n*'est possible *que* par l'emploi des infiniment petits; or, dans l'infiniment petit, toutes les surfaces deviennent planes. La formule fondamentale qui donne la longueur d'un arc infiniment petit ne s'obtient qu'en supposant qu'un tel arc

(1) Doctrine de Jérémie Bentham, qui proposait comme règle morale la recherche de la plus grande somme de plaisirs, évaluée au moyen d'une sorte de calcul. (*Note de M. Couturat.*)

peut être traité comme une ligne droite, et que la Géométrie plane euclidienne peut s'appliquer au voisinage immédiat d'un point quelconque. Si nous n'avions pas notre mesure euclidienne, qui peut être déplacée sans déformation, nous n'aurions aucune méthode pour comparer de petits arcs en différents lieux, et la Géométrie des surfaces non congruentes serait ruinée. Ainsi l'axiome de Libre Mobilité, en ce qui concerne l'espace à trois dimensions, est nécessairement impliqué et présupposé dans la Géométrie des surfaces non congruentes; la possibilité de celle-ci est, par suite, une possibilité dépendante et dérivée, et ne peut fournir aucun argument contre la nécessité *a priori* de la congruence comme criterium de l'égalité.

154. Il convient d'observer que l'axiome de Libre Mobilité, tel que je l'ai énoncé, comprend aussi l'axiome auquel Helmholtz donne le nom de *Monodromie*. Celui-ci affirme qu'un corps ne change pas de dimensions par suite d'une révolution complète (de quatre angles droits), mais occupe à la fin la même position qu'au commencement. L'opinion suivant laquelle il serait mathématiquement nécessaire de faire de cette propriété de l'espace un axiome séparé a été réfutée par Sophus Lie (¹); philosophiquement, la Monodromie est manifestement un cas particulier de la Libre Mobilité (²), et même un cas particulièrement évident, car une translation produit réellement quelque changement dans un corps, à savoir un changement de position, tandis qu'une rotation de quatre angles droits peut être supposée effectuée un nombre quelconque de fois sans apparaître dans le résultat, et il y a une absurdité palpable à attribuer à l'espace le pouvoir de faire grandir les corps pendant cette opération; tout ce qu'on a dit ci-dessus sur la congruence en général s'applique avec une plus grande évidence encore à ce cas spécial.

155. L'axiome de Libre Mobilité implique, comme condition

(¹) *Voir* Chap. I, § 45.

(²) De même qu'un autre axiome de Helmholtz, suivant lequel la possibilité de la superposition est indépendante du chemin suivi pour l'effectuer.

de sa vérité, l'homogénéité de l'espace, ou la complète relativité de la position. Car si une forme qui est possible en une partie de l'espace doit toujours être possible en une autre, il s'ensuit que toutes les parties de l'espace sont qualitativement semblables, et ne peuvent, par conséquent, se distinguer par aucune propriété intrinsèque. Il faut donc, si notre axiome est vrai, que les positions dans l'espace soient entièrement définies par des relations extérieures, c'est-à-dire que *la position n'est pas une propriété intrinsèque, mais une propriété purement relative des choses dans l'espace.* Bref, s'il pouvait exister quelque chose comme la position absolue, la Géométrie métrique serait impossible. Cette relativité de la position est le postulat fondamental de toute la Géométrie, celui auquel aboutit chacun des axiomes métriques nécessaires, et duquel, inversement, chacun de ces axiomes peut se déduire.

156. Cette déduction inverse, en ce qui concerne la Libre Mobilité, n'est pas très difficile; elle résulte du raisonnement de la Section A [1], que je vais résumer brièvement. En premier lieu, l'extériorité est un concept essentiellement relatif : car rien ne peut être extérieur à soi-même. Être extérieur à quelque chose, c'est être autre, avec quelque relation à cette chose. Donc, lorsque l'on conçoit une forme d'extériorité en faisant abstraction de tout contenu matériel, et qu'on l'étudie isolément, la position apparaît nécessairement comme purement relative; elle ne peut avoir aucune qualité intrinsèque, car notre forme consiste en pure extériorité, et l'extériorité ne contient aucune ombre ou trace d'une qualité intrinsèque. De là dérive notre postulat fondamental, la relativité de la position. Il en résulte l'homogénéité de notre forme, car s'il y avait dans une position une qualité quelconque qui la distinguât d'une autre, cette qualité serait nécessairement plus ou moins intrinsèque, et contredirait la pure relativité. Enfin la libre mobilité découle de l'homogénéité, car notre forme ne serait pas homogène si elle n'admettait pas dans chaque partie les formes

---

(1) *Cf.* §§ 129, 130.

ou les systèmes de relations qu'elle admet dans toute autre partie. La Libre Mobilité est donc une propriété nécessaire de toute forme possible d'extériorité.

157. En récapitulant l'argumentation que nous venons de clore, nous pouvons l'exposer, en conséquence des deux paragraphes précédents, sous la forme d'un cercle complet. Partant des conditions de la mesure spatiale, on trouve que la comparaison, requise pour la mesure, ne peut s'effectuer que par la superposition. Mais on trouve, d'autre part, que le résultat de cette comparaison ne sera exempt d'équivoque, que si les grandeurs et les formes spatiales ne sont pas altérées par le mouvement dans l'espace, que si, en d'autres termes, les formes ne dépendent pas de leur position absolue dans l'espace. Mais cet axiome ne peut être vrai que si l'espace est homogène et la position purement relative. Réciproquement, si l'on admet que la position est purement relative, un changement de grandeur pendant le mouvement est impossible, attendu qu'il implique l'existence d'une position absolue, et notre criterium d'égalité spatiale est par suite légitime. Mais, dans une forme d'extériorité quelconque, la position ne peut être que purement relative, puisque l'extériorité ne peut pas être une propriété intrinsèque de quelque chose. Notre axiome est donc *a priori* dans un double sens : il est présupposé dans toute mesure spatiale, et il est une propriété nécessaire de toute forme d'extériorité. On verra que les autres axiomes nécessaires possèdent de même une double apriorité.

II. — L'axiome des dimensions (¹).

158. Nous avons vu, en discutant l'axiome de Libre Mobilité, que toute position est relative, c'est-à-dire qu'une position n'existe qu'en vertu de relations (²). Il s'ensuit que, pour que l'on

(¹) Cette déduction est pratiquement la même que celle de la Sect. A; mais je l'ai formulée ici en la rapportant plus spécialement à l'espace et à la Géométrie métrique.

(²) On peut demander à quoi s'appliquent ces relations; c'est là une ques-

puisse définir des positions, il faut qu'elles soient définies d'une manière complète et unique par un nombre fini de ces relations. Pour que la Géométrie soit possible, il faut que, une fois donné un nombre de relations suffisant pour déterminer un point d'une manière unique, ses relations à tout autre point puissent se déduire des relations déjà données. On obtient ainsi comme condition *a priori* de la Géométrie, logiquement indispensable à son existence, cet axiome que *l'Espace doit avoir un nombre entier fini de dimensions*. En effet, chacune des relations requises pour définir un point constitue une dimension, et une fraction de relation est un non-sens. Le nombre des relations requises doit être fini, puisqu'un nombre infini de dimensions serait pratiquement impossible à déterminer. En tenant compte de l'axiome de Libre Mobilité, et en se rappelant que l'espace est un continu, on peut énoncer notre axiome, pour la Géométrie métrique, sous la forme donnée par Helmholtz : « Dans un espace à n dimensions, la position de chaque point est déterminée d'une manière unique par la mesure de n variables continues indépendantes (coordonnées) (1). »

159. Voilà donc tout ce qui est nécessaire *a priori* à la Géométrie métrique. La restriction du nombre des dimensions à trois paraît, en revanche, être entièrement le produit de l'expérience (2). Cette restriction ne peut pas être logiquement nécessaire, car dès qu'on a formulé un système analytique quelconque, elle paraît absolument arbitraire. Pourquoi, est-on conduit à se demander, ne peut-on pas ajouter une quatrième coordonnée à x, y, z, ou donner une signification géométrique à x^4? Sous cette forme plus spéciale, nous sommes tentés de regarder l'axiome des dimensions comme un fait purement statistique, tel que le nombre des habitants d'une ville, et n'ayant pas plus de nécessité que n'en ont les faits de ce genre.

---

tion qui enveloppe bien des difficultés. Nous en parlerons plus loin dans ce Chapitre, et nous y répondrons autant que possible dans le Chapitre IV. Pour le moment, malgré le cercle manifeste que cela implique, je considérerai les relations comme des relations à d'autres positions.

(1) *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. II, p. 614. (*Cf.* Chap. I, § 25.)

(2) *Cf.* GRASSMANN, *Ausdehnungslehre* de 1844, 2e édition, p. XXIII.

La Géométrie apporte une preuve intrinsèque à l'appui de ma division de l'axiome des dimensions en une partie *a priori* et une partie empirique. En effet, tandis que l'extension du nombre des dimensions à quatre ou à n ne change rien dans la Géométrie plane et solide, et ne fait qu'ajouter une nouvelle branche qui ne gêne en aucune manière les anciennes, toutes les Géométries supposent *un* nombre défini quelconque de dimensions, et il n'est pas possible de concevoir une Géométrie qui serait affranchie de cette supposition [1].

160. Puisque ce point semble de quelque intérêt, nous allons répéter notre démonstration de l'apriorité de cet axiome d'un point de vue légèrement différent. Nous commençons, cette fois, par le concept le plus abstrait de l'espace, tel que nous le trouvons dans la dissertation de Riemann, ou dans les *Étendues* d'Erdmann. Ce concept est celui d'une multiplicité ordonnée, divisible à l'infini, et qui admet la libre mobilité [2]. La libre mobilité implique, nous l'avons vu, le pouvoir de passer d'une manière continue d'un point quelconque à un autre quelconque, par tel chemin qu'il nous plaira de choisir; elle implique en outre que, dans ce trajet, aucun changement n'arrive, si ce n'est des changements de pure position, c'est-à-dire que les positions n'offrent entre elles aucune différence qualitative. (Cette absence de différence qualitative est le caractère distinctif de l'espace par opposition à d'autres multiplicités, telles que les ensembles des couleurs et des sons : dans ceux-ci, chaque élément a une valeur sensible qualitative définie, tandis que, dans l'espace, la valeur sensible d'une position dépend entièrement de sa relation spatiale à notre propre corps, et partant n'est pas intrinsèque, mais relative.) De l'absence de différences qualitatives entre les positions, il suit logiquement

---

(1) Delbœuf, il est vrai, parle de Géométries à $\frac{m}{n}$ dimensions, mais il ne donne aucune référence (*Rev. Phil.*, t. XXXVI, p. 450).

(2) Il convient de rappeler qu'en critiquant Erdmann, nous avons vu que la Libre Mobilité est une propriété nécessaire de ses étendues, bien qu'il ne la regarde pas comme telle.

que des positions n'existent que par d'autres positions; une position diffère d'une autre précisément parce qu'elles sont deux, et non à cause d'une propriété intrinsèque quelconque de l'une ou de l'autre. Ainsi la position est définie purement et simplement par rapport à d'autres positions. Une position quelconque n'est donc complètement définie que lorsque de telles relations sont données en nombre suffisant pour permettre de déterminer sa relation à n'importe quelle autre position, celle-ci étant définie par le même nombre de relations. Or, pour qu'une telle définition puisse être possible, il faut qu'un nombre fini de relations soit suffisant. Mais chacune de ces relations constitue une dimension. Par conséquent, pour que la Géométrie soit possible, il est nécessaire *a priori* que l'espace ait un nombre entier fini de dimensions.

161. La limitation des dimensions à trois est, comme nous l'avons vu, empirique; néanmoins, elle n'est pas sujette à l'inexactitude et à l'incertitude que comporte ordinairement la connaissance empirique. En effet, les alternatives que la logique laisse ouvertes à l'expérience sont discontinues (s'il n'y avait pas trois dimensions, il faudrait qu'il y en eût deux ou quatre, ou quelque autre nombre), de sorte qu'il ne peut être question de *petites* erreurs [1]. Ainsi la certitude finale de l'axiome des trois dimensions, bien que due en partie à l'expérience, est d'un ordre tout à fait différent de celui de la loi de la gravitation, par exemple. Dans celle-ci, une petite inexactitude peut exister et rester inaperçue; dans celui-là, au contraire, une erreur devrait être si considérable qu'il serait absolument impossible de la méconnaître. Il s'ensuit que la certitude de l'axiome tout entier, savoir que les dimensions sont au nombre de trois, est presque aussi grande que celle de l'élément *a priori*, puisque cet élément offre à l'expérience une disjonction définie de possibilités discontinues.

---

[1] *Cf.* Riemann, *Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, ap. *Gesammelte Werke*, p. 266; *voir* aussi Erdmann, *op. cit.*, p. 154.

III. — L'axiome de la distance.

162. Nous avons déjà vu, en étudiant la Géométrie projective, que deux points doivent déterminer une courbe unique, la ligne droite. Dans la Géométrie métrique, l'axiome correspondant est que deux points doivent déterminer une grandeur spatiale unique, la distance. Je me propose de démontrer, dans ce qui suit : 1° que si la distance n'existait pas comme grandeur complètement déterminée par deux points, la grandeur spatiale ne serait pas mesurable; 2° que la distance ne peut être déterminée par deux points que s'il y a dans l'espace une ligne actuelle déterminée par ces deux points; 3° que l'existence d'une telle courbe peut se déduire du concept d'une forme d'extériorité; et 4° que l'application de la grandeur à une telle courbe engendre nécessairement une certaine quantité, à savoir, la distance, déterminée d'une manière unique par deux points quelconques qui déterminent la courbe. La conclusion sera que, si ces propositions peuvent être soutenues avec succès, l'axiome de la distance est *a priori* dans le même double sens que l'axiome de Libre Mobilité, c'est-à-dire qu'il est présupposé dans la possibilité de la mesure, et qu'il est nécessairement vrai de toute forme possible d'extériorité.

163. 1° La possibilité de la mesure spatiale nous permet d'inférer l'existence d'une grandeur déterminée d'une manière unique par deux points quelconques. La preuve de cette thèse dérive de l'axiome de Libre Mobilité, ou de son équivalent, l'homogénéité de l'espace. Nous avons vu que ces axiomes sont impliqués dans la possibilité de la mesure spatiale; nous pouvons donc les employer dans tout raisonnement relatif aux conditions de cette possibilité.

Tout d'abord, pour que la Géométrie soit possible, il faut que deux points aient *quelque* relation entre eux, car nous avons vu que seules de telles relations constituent la position ou la localisation. Mais si deux points ont une relation entre eux, c'est nécessairement une relation intrinsèque. En effet, de

l'axiome de Libre Mobilité il résulte qu'on peut construire dans n'importe quelle partie de l'espace deux points formant une figure congruente avec ce couple de points donnés. Si cela n'était pas possible, on a vu que la Géométrie métrique ne pourrait pas exister. Mais chacune des deux figures peut être regardée comme composée de deux points et de leur relation; si donc les deux figures sont congruentes, il s'ensuit que la relation est quantitativement la même pour les deux figures, puisque la congruence est le criterium de l'égalité spatiale. Ainsi les deux points ont une relation quantitative, qui est telle qu'ils peuvent se déplacer ensemble à travers l'espace sans altérer en aucune manière cette relation. Mais dans un déplacement aussi général, aucune relation extérieure des deux points, aucune relation impliquant d'autres points ou figures de l'espace ne peut rester inaltérée [1]. Par suite, la relation entre les deux points, restant inaltérée, est nécessairement une relation intrinsèque, une relation qui n'implique aucun autre point ou figure de l'espace; c'est cette relation intrinsèque que nous appelons *distance* [2].

164. On pourrait objecter au raisonnement précédent qu'il implique une pétition de principe. Car on a supposé que les deux points et leur relation forment une figure, à laquelle

---

[1] Cette proposition est sujette, dans l'espace sphérique, à une modification qu'on indiquera plus bas, en étudiant l'exception à l'axiome de la ligne droite. *Voir* §§ 168-171.

[2] En parlant de la distance à la fois comme une grandeur et comme une relation intrinsèque, je tiens à me défendre d'une inconséquence apparente. J'ai parlé constamment du jugement de grandeur comme d'un jugement de comparaison; comment, alors, une grandeur peut-elle être intrinsèque? Je répondrai que, bien que la mesure et le jugement de grandeur expriment le résultat de la comparaison, il faut néanmoins que les termes comparés existent avant la comparaison; dans le cas présent, où l'on mesure des distances, c'est-à-dire où on les compare entre elles, les termes de la comparaison sont les relations intrinsèques entre les points. Ainsi, quoique la *mesure* de la distance implique une référence à d'autres distances, et que son expression comme grandeur exige une telle référence, son existence ne dépend pourtant d'aucune référence extérieure, mais uniquement des deux points dont elle est la distance.

d'autres figures peuvent être congruentes. Or si deux points n'ont pas de relation intrinsèque, il semble qu'ils ne puissent pas former une telle figure. Le raisonnement suppose donc en apparence ce qu'il doit prouver. Pourquoi, peut-on demander, trois points ne seraient-ils pas requis pour obtenir une relation que la Libre Mobilité nous permette de construire de nouveau en d'autres parties de l'espace?

La réponse à cette objection, comme à la question correspondante dans la première section de ce Chapitre, se trouve, je crois, dans la passivité de l'espace, ou dans la mutuelle indépendance de ses parties. Car de cette indépendance il suit qu'aucune figure ou aucun assemblage de points ne peut être étudié sans référence à d'autres figures ou points. Ce principe est la base de la divisibilité à l'infini, de l'emploi de la grandeur en Géométrie, et de toute possibilité d'isoler les figures particulières pour les étudier. Il s'ensuit que deux points ne peuvent pas dépendre, quant à leur relation, de n'importe quels autres points ou figures, car s'ils en dépendaient, on devrait admettre une certaine action de ces points ou figures sur les deux points considérés, et cette action contredirait la mutuelle indépendance des diverses positions. Pour illustrer cela par un exemple, la relation de deux points donnés ne dépend pas des autres points de la ligne droite sur laquelle se trouvent les points donnés. Car ce n'est que par leur relation, c'est-à-dire par la ligne droite qu'ils déterminent, qu'on peut savoir que les autres points de la ligne droite ont une connexion particulière avec le couple donné.

165. Mais, peut-on demander, pourquoi ne doit-il y avoir qu'une seule relation entre deux points? Pourquoi pas plusieurs? La réponse à cette question se trouve dans le fait que les points sont entièrement constitués par des relations, et n'ont par eux-mêmes aucune nature intrinsèque (¹). Un point est défini par ses relations avec d'autres points, et une fois que les relations nécessaires pour le définir sont données, il ne peut y avoir de

---

(¹) *Voir* la fin du raisonnement sur la Libre Mobilité, § 155 et suiv.

nouvelles relations avec les points employés dans cette définition, puisque le point défini n'a pas de qualités d'où puissent découler de telles relations. Or une relation avec un autre point vaut autant que plusieurs pour définir le point, puisque, quel que fût leur nombre, elles resteraient invariables dans un déplacement de l'ensemble des deux points. Il ne peut donc y avoir qu'une seule relation déterminée par deux points quelconques.

166. 2° Nous avons ainsi établi notre première proposition : deux points ont une et une seule relation déterminée d'une manière unique par ces deux points. C'est cette relation que nous appelons leur *distance*. Il reste à considérer les conditions de la mesure de la distance, c'est-à-dire jusqu'à quel point une valeur unique pour la distance implique une courbe déterminée d'une manière unique par les deux points.

En premier lieu, une certaine courbe joignant les deux points se trouve impliquée dans la notion, invoquée ci-dessus, d'un mouvement de l'ensemble des deux points, ou de deux autres points qui forment une figure congruente avec les deux premiers. Car, sans une telle courbe, les deux couples de points ne pourraient être connus comme congruents, et nous n'aurions aucun criterium qui nous permît de découvrir quand un couple de points se meut en bloc comme une figure ([1]). Il faut donc que la distance soit mesurée par quelque ligne qui joigne les deux points. Mais est-il nécessaire que ce soit une ligne que les deux points déterminent complètement?

167. Nous sommes accoutumés à la définition de la ligne

([1]) Dans FRISCHAUF, *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai*, Appendice, il y a une série de définitions, partant de la sphère définie comme le lieu des couples de points congruents lorsqu'un point du couple est fixe, et dérivant de là le cercle et la ligne droite. De ce qui a été dit ci-dessus il suit que la sphère ainsi définie implique déjà une courbe qui joint les points du couple, et qui permet de reconnaître que les divers couples de points sont congruents; et il apparaîtra, dans la suite, que cette courbe est nécessairement une ligne droite. La définition de la droite par Frischauf au moyen de la sphère implique donc un cercle vicieux, puisque la sphère présuppose la ligne droite comme criterium de la congruence des couples de points.

droite comme la *plus courte* distance entre deux points, ce qui implique que la distance pourrait aussi bien être mesurée par des lignes courbes. Cette supposition est fausse, à mon avis, pour les raisons suivantes : Lorsqu'on parle de la longueur d'une courbe, on ne peut donner un sens à ces mots qu'en supposant la courbe divisée en arcs rectilignes infiniment petits, dont la somme donne la longueur d'une ligne droite équivalente; ainsi l'on n'a aucun moyen de comparer les longueurs des différentes courbes sans présupposer la ligne droite, et par suite on ne peut jamais s'assurer de l'applicabilité de notre définition. On pourrait croire, peut-être, que quelque autre ligne, par exemple un cercle, puisse être employée comme étalon de mesure. Mais pour estimer de cette manière la longueur d'une courbe quelconque autre qu'un cercle, on devrait diviser la courbe en arcs de cercle infinitésimaux. Or deux points successifs ne déterminent pas un cercle, de sorte qu'un arc de deux points aurait une longueur indéterminée. Il est vrai que, si l'on exclut les rayons infiniment petits pour les cercles qui servent à la mesure, la longueur des arcs infinitésimaux serait déterminée, même si les cercles variaient, mais c'est seulement parce que tous les petits arcs de cercle qui passent par deux points consécutifs coïncident avec la ligne droite qui passe par ces deux points. Ainsi, même à l'aide de cette restriction arbitraire aux rayons finis, tout ce qu'on obtient est d'être ramené à la ligne droite. Si, pour arranger les choses, on prend trois points consécutifs de la courbe, et que l'on évalue la distance par l'arc du cercle osculateur [1], la notion de distance perd sa propriété fondamentale d'être une relation entre *deux* points. Car on ne peut pas dire alors que deux points consécutifs de l'arc aient entre eux une distance propre : trois points seraient nécessaires pour que la notion de distance devînt applicable. Ainsi le cercle ne peut être une base pour la mesure, et des objections semblables s'appliquent naturellement à plus forte raison

---

[1] Le cercle osculateur d'une courbe est justement un cercle qui a trois points infiniment voisins en commun avec cette courbe.

(*Note du traducteur.*)

à toute autre courbe. Tout ce raisonnement est destiné à montrer, en détail, l'impossibilité logique de mesurer la distance par une courbe quelconque non complètement définie par les deux points dont on cherche la distance. Si nous avions pris ci-dessus la distance comme mesurée par des cercles de *rayon donné*, nous aurions introduit dans sa définition une relation à d'autres points que les deux dont on veut mesurer la distance, ce qui, on l'a vu, est une faute de logique. D'ailleurs, comment pourrions-nous savoir que tous les cercles ont des rayons égaux, à moins d'avoir une mesure de la distance indépendante du cercle?

168. Ainsi la ligne droite n'est pas la *plus courte* distance, mais simplement *la* distance entre deux points; dans cette mesure, notre conclusion est établie. Mais supposons qu'on ait deux ou plusieurs courbes passant par deux points, et que toutes ces courbes soient congruentes entre elles. Nous dirons alors, conformément à la définition de l'égalité spatiale, que les longueurs de toutes ces courbes sont égales. Or il peut arriver que, bien qu'aucune de ces courbes ne soit déterminée d'une manière unique par les deux points extrêmes, la commune longueur de toutes ces courbes soit pourtant déterminée par là. Dans ce cas, qu'est-ce qui nous empêcherait d'appeler cette commune longueur la *distance* de ces deux points, quoiqu'il ne lui corresponde pas une figure unique dans l'espace? C'est le cas que considère la Géométrie sphérique, où, comme sur la sphère, les antipodes peuvent être joints par un nombre infini de lignes géodésiques, toutes d'égale longueur. La difficulté supposée n'est donc pas purement imaginaire, mais une difficulté que la Géométrie moderne nous force à envisager. En conséquence, je vais la discuter assez longuement.

169. Tout d'abord, il faut que je montre que mon axiome n'est pas absolument équivalent à celui d'Euclide. L'axiome d'Euclide porte que deux lignes droites ne peuvent pas enfermer un espace, c'est-à-dire ne peuvent pas avoir plus d'un point commun. Or si chaque couple de points, sans exception, dé-

termine une ligne droite unique, il s'ensuit naturellement que deux lignes droites différentes ne peuvent avoir qu'un seul point commun ; dans cette mesure, les deux axiomes sont équivalents. Mais il peut arriver, comme dans l'espace sphérique, que deux points *en général* déterminent une seule ligne droite, mais ne le fassent pas lorsqu'ils ont entre eux cette relation spéciale qui consiste à être antipodes. Dans un tel système, tout couple de lignes droites situées dans le même plan se rencontre en deux points, qui sont les antipodes l'un de l'autre ; mais deux points, *en général*, déterminent encore une seule ligne droite. On peut encore, par suite, mesurer la distance suivant une ligne droite unique, excepté dans les cas limites ; et dans ces cas, on peut prendre un point quelconque intermédiaire entre les deux antipodes, le joindre par une *même* ligne droite aux deux antipodes, et mesurer sa distance aux deux antipodes de la manière usuelle. La somme de ces distances donnera alors une valeur unique pour la distance des deux antipodes.

Ainsi, même dans l'espace sphérique, on tire un grand secours de l'axiome de la ligne droite : toutes les mesures linéaires s'effectuent par son moyen, et grâce à lui les cas exceptionnels peuvent être traités par la méthode usuelle des limites. L'espace sphérique n'est donc pas aussi contraire qu'il paraissait d'abord à la nécessité *a priori* de l'axiome. Néanmoins nous n'avons pas encore attaqué le nœud de l'objection que suscite l'espace sphérique. C'est ce que nous devons faire à présent.

170. Il convient de rappeler que, en prouvant *a priori* que deux points doivent avoir une relation définie, nous avons tenu pour impossible que ces deux points eussent, avec le reste de l'espace, une relation qui resterait inaltérée par le mouvement. Or dans l'espace sphérique, dans le cas particulier où les deux points sont antipodes, ils *ont* avec le reste de l'espace une relation que n'altère pas le mouvement, à savoir cette relation que leur distance est la moitié de la circonférence de l'univers. Dans notre discussion antérieure, nous avons supposé que toute relation avec l'espace extérieur ne peut être qu'une relation de position, et une relation de position est nécessairement altérée

par le mouvement. Mais dans un espace fini, où l'on a une grandeur absolue, une autre relation devient possible, à savoir une relation de grandeur. Par suite, des points antipodes, comme des points coïncidents, ne déterminent plus une ligne droite unique. Et il est instructif d'observer qu'il y a, en conséquence, dans l'expression de la distance, une ambiguïté analogue à l'ambiguïté ordinaire dans la mesure des angles. Si $\frac{1}{k^2}$ est la constante spatiale, et d une valeur de la distance de deux points, $2\pi kn \pm d$, où n est un nombre entier quelconque, est une valeur également acceptable. En un mot, la distance est une fonction périodique, comme l'angle. Ainsi un tel état de choses confirme plutôt qu'il ne détruit ma thèse, à savoir que la distance dépend d'une courbe déterminée d'une manière unique par deux points. Car dès qu'on abandonne cette détermination univoque, on voit les ambiguïtés s'introduire dans notre expression de la distance. La distance a encore un système de valeurs *discontinues,* correspondant au fait qu'un point donné détermine d'une manière unique la droite qui le joint à tout autre point, sauf un, son antipode. On est tenté d'aller plus loin, et de dire : Si par *chaque* couple de points il passait un nombre infini de courbes servant à mesurer la distance, la distance pourrait, pour le même couple de points, prendre, non seulement une série discontinue, mais une série infinie *continue* de valeurs.

171. Mais cela est de la spéculation pure. J'arrive maintenant à la *pièce de résistance* (¹) de mon raisonnement. L'ambiguïté dans l'espace sphérique provenait, nous l'avons vu, d'une relation de *grandeur* avec le reste de l'espace, parce que cette relation n'est pas altérée par un mouvement des deux points et, par suite, échappe à notre raisonnement préparatoire. Mais qu'est-ce que cette relation de grandeur? Simplement un rapport de la *distance* des deux points à une *distance* donnée dans la nature de l'espace en question. Il s'ensuit qu'une telle

---

(¹) En français dans le texte. (*Note du traducteur.*)

relation *présuppose* une mesure de la distance, et ne doit pas, par conséquent, entrer en considération dans un raisonnement qui traite des conditions *a priori* de la possibilité de distances définies ([1]).

172. J'ai montré d'une manière concluante, j'espère, que l'espace sphérique ne fournit aucune objection à l'apriorité de mon axiome. Deux points quelconques ont une relation, leur distance, qui est indépendante du reste de l'espace, et cette relation exige, pour la mesurer, une courbe déterminée d'une manière unique par ces deux points. J'aurais pu prendre le taureau par les cornes, et dire : Deux points ne *peuvent* avoir aucune autre relation que celle qui est fournie par les lignes qui les joignent, et par conséquent, s'ils ont une relation indépendante du reste de l'espace, il faut qu'il y ait une ligne qui les joigne et qu'ils déterminent complètement. Ainsi James dit ([2]) :

« Tout de même que, dans le domaine de la grandeur, le rapport entre deux nombres est un autre nombre, de même dans le domaine de l'espace les rapports sont des faits du même ordre que les faits qu'ils mettent en relation.... Quand nous parlons du rapport de direction de deux points l'un à l'égard de l'autre, nous entendons simplement la sensation de la ligne qui joint ces deux points. *La ligne est cette relation*.... La relation de position entre les points extrêmes d'une ligne verticale est cette ligne, et rien d'autre. »

Si j'avais voulu invoquer cette théorie dès le commencement, j'aurais pu éluder toute discussion. Dans ce cas, une relation unique entre deux points implique *nécessairement* une ligne unique qui les joigne. Mais il m'a paru préférable de me passer

---

([1]) Ni dans un raisonnement qui, comme ceux de la Géométrie projective, exclut tout à fait la notion de grandeur ou de distance. Il s'ensuit que les propositions de la Géométrie projective s'appliquent sans réserve à l'espace sphérique, puisque l'exception à l'axiome de la ligne droite repose seulement sur un fondement métrique.

([2]) *Psychology*, t. II, p. 149-150.

d'une théorie qui n'est pas universellement acceptée, d'autant plus que j'abordais la question du côté logique, et non du côté psychologique. Toutefois, après avoir écarté ces objections, il est intéressant de trouver cette confirmation de la théorie précédente, en partant d'un point de vue si différent. En fait, on peut prouver, je crois, que la doctrine de James exprime une nécessité logique, aussi bien qu'un fait psychologique. Car quelle espèce de chose peut être une relation spatiale entre deux points distincts? Elle est nécessairement quelque chose de spatial, et, puisque les points sont entièrement constitués par leurs relations, quelque chose d'au moins aussi réel et tangible que les points qu'elle relie. Il semble qu'il n'y ait rien qui puisse satisfaire ces exigences, si ce n'est une ligne qui les joint. Par suite, encore une fois, une relation unique implique nécessairement une ligne unique. C'est-à-dire que la grandeur linéaire serait logiquement impossible, si l'espace n'admettait pas des courbes déterminées d'une manière unique par deux quelconques de leurs points.

173. 3° Mais, de plus, l'existence de courbes déterminées d'une manière unique par deux points peut se déduire de la nature d'une forme d'extériorité ([1]). Nous avons vu, en effet, en étudiant la Libre Mobilité, que cet axiome, ainsi que l'homogénéité et la relativité de la position, peut se déduire de cette manière, et, au commencement de notre discussion sur la distance, que l'existence d'une relation unique entre deux points peut se déduire de l'homogénéité de l'espace. Puisque la position est relative, pouvons-nous dire, deux points quelconques doivent avoir *quelque* relation entre eux : puisque notre forme d'extériorité est homogène, cette relation peut rester invariable pendant que les deux points se déplacent dans la forme, c'est-à-dire pendant qu'ils changent de relation avec les autres points; par suite, leur relation mutuelle est une relation intrinsèque,

---

([1]) Cette étape de l'argumentation sera très brièvement traitée, parce qu'elle est une simple répétition de l'argument correspondant dans la section A, et qu'elle n'est insérée ici que pour rendre notre exposé logiquement complet. *Voir* § 137 et suiv.

indépendante de leurs relations avec d'autres points. Mais, puisque notre forme *est* purement un complexe de relations, une relation d'extériorité doit apparaître dans cette forme avec la même évidence que tout autre élément de la forme; donc, si la forme est intuitive ou sensible, la relation doit être immédiatement représentée, et non une pure inférence. Par conséquent, la relation intrinsèque entre deux points doit être une figure unique dans notre forme, c'est-à-dire, en termes spatiaux, la ligne droite qui joint les deux points.

174. 4° Enfin, nous avons à prouver que, lorsqu'on applique la grandeur à la relation entre deux points, l'existence d'une telle courbe donne nécessairement lieu à une grandeur unique, que ces deux points déterminent complètement. Avec cette thèse, nous serons ramené à la distance dont nous sommes parti, et nous achèverons le cercle de notre démonstration.

Nous avons vu (section A, § 119) que la figure formée par deux points est projectivement indiscernable de celle que forment deux autres points quelconques de la même ligne droite; dans les deux cas, la figure est simplement, au point de vue projectif, la ligne droite sur laquelle se trouvent les deux points. La différence de relation, dans ces deux cas, n'est pas qualitative, puisque la Géométrie projective ne peut pas la connaître; néanmoins, il y a une certaine différence de relation. Par exemple, si l'un des points reste fixe, tandis que l'autre se déplace, il y a évidemment quelque changement de relation. Or, puisque toutes les parties de la ligne droite sont qualitativement semblables, ce changement ne peut être qu'un changement de grandeur. Si donc deux points déterminent une figure unique, il faut, pour les distinguer des divers autres points de cette figure, qu'il existe une relation quantitative unique entre les deux points déterminants, et par suite, puisque ces points sont arbitraires, entre deux points seulement. Cette relation est la *distance*, par où notre raisonnement a commencé et où il revient finalement.

175. Pour nous résumer : si les points sont définis simplement par leurs relations avec d'autres points, c'est-à dire, si

toute position est relative, *chaque point doit avoir avec chaque autre point une, et une seule, relation indépendante du reste de l'espace. Cette relation est la distance des deux points*. Or une relation entre deux points ne peut être définie que par une ligne qui les joint; bien plus, on peut soutenir que cette relation ne peut *être* qu'une ligne qui les joint. Une relation unique implique donc une ligne unique, c'est-à-dire une ligne déterminée par deux quelconques de ses points. Ce n'est que dans un espace qui admet une telle ligne que la grandeur linéaire est une notion logiquement possible. Mais une fois que l'on a établi la possibilité, *en général*, de tracer de telles lignes, et par suite de mesurer les grandeurs linéaires, on peut trouver qu'une certaine grandeur a un rapport particulier à la constitution de l'espace. Il peut se faire que la ligne droite ait une longueur finie, et, dans ce cas, sa longueur fournira une certaine grandeur particulière, la constante spatiale. Deux points antipodes, c'est-à-dire des points qui coupent en deux la ligne droite entière, auront alors une relation de grandeur qui, bien que non altérée par le mouvement, est particularisée par une certaine relation constante avec le reste de l'espace. Cette particularité présuppose la mesure des grandeurs linéaires en général, et ne peut, par conséquent, ruiner l'apriorité de l'axiome de la ligne droite. Mais elle ruine, pour les points qui possèdent cette propriété particulière d'être les antipodes l'un de l'autre, l'argument qui prouve que la relation entre deux points ne peut avoir aucune référence au reste de l'espace, attendu qu'elle reste invariable dans le mouvement. On comprend ainsi que, pour ces points spéciaux, l'axiome tombe en défaut, et qu'il puisse y avoir entre eux un nombre infini de lignes droites; mais si nous n'avions pas commencé par admettre la validité générale de l'axiome, nous n'aurions jamais pu atteindre une position d'où les points antipodes pussent être reconnus comme des points particuliers, ni même une position qui nous permît de donner une définition quantitative quelconque de points particuliers.

Ainsi la distance et la ligne droite, en tant que relations déterminées d'une manière unique par deux points, sont néces-

saires *a priori* à la Géométrie métrique. Mais, de plus, ce sont des propriétés qui appartiennent nécessairement à toute forme d'extériorité. Puisque leur nécessité pour la Géométrie a été déduite de l'homogénéité et de la relativité de la position, et puisque celles-ci sont des propriétés nécessaires de toute forme d'extériorité, le même raisonnement prouve les deux conclusions. Nous obtenons ainsi, comme dans le cas de la Libre Mobilité, une double apriorité : l'axiome de la Distance et son corollaire, l'axiome de la Ligne Droite, sont, d'une part, présupposés par la possibilité de la grandeur spatiale, et ne peuvent, par suite, être contredits par aucune expérience résultant de la mesure de l'espace; et d'autre part, ils sont des conséquences de propriétés nécessaires de toute forme d'extériorité destinée à rendre possible l'expérience d'un monde extérieur.

176. A propos de la ligne droite, il convient de rechercher les conditions d'un système de coordonnées métriques. Le système des coordonnées projectives, on l'a vu, sert seulement de nomenclature commode pour les différents points, et peut être établi sans introduire la notion de grandeur spatiale. Mais un système de coordonnées métriques a une tout autre portée. Il définit chaque point quantitativement par ses relations spatiales quantitatives avec une certaine figure coordonnée. Lorsque le système des cordonnées est métrique, chaque coordonnée représente une grandeur spatiale qui est elle-même une relation du point défini avec quelque autre point ou figure; et c'est alors seulement que les opérations effectuées sur les coordonnées peuvent aboutir à un résultat métrique. Lorsque, comme en Géométrie projective, les coordonnées ne sont pas des grandeurs spatiales, aucune somme de transformations ne peut donner un résultat métrique. Je veux prouver maintenant qu'un système de coordonnées métriques implique nécessairement la ligne droite, et ne peut, sans paralogisme, être établi sur aucune autre base. Le système des coordonnées projectives, on l'a vu, est entièrement fondé sur la ligne droite; mais le système des coordonnées métriques est plus important, parce que ses quan-

tités incarnent des informations réelles touchant les grandeurs spatiales, ce qui n'est pas le cas en Géométrie projective.

En premier lieu, les coordonnées métriques d'un point en constituent une définition quantitative complète; or un point ne peut être défini, on l'a vu, que par ses relations avec d'autres points, et ces relations ne peuvent être définies qu'au moyen de la ligne droite. Conséquemment, tout système de coordonnées métriques doit impliquer la ligne droite comme base de ses définitions de points.

Toutefois, cet argument *a priori*, bien que je le croie absolument valable, ne paraît pas capable de convaincre une personne persuadée du contraire. Nous allons donc examiner en détail les systèmes de coordonnées métriques, et montrer, dans chaque cas, qu'ils dépendent de la ligne droite.

Nous avons déjà vu que la notion de distance est impossible sans la ligne droite. Nous ne pouvons donc définir nos coordonnées d'aucune des manières ordinaires, comme distances mesurées à partir de trois plans, lignes, points, sphères ou d'autres figures. Les coordonnées polaires sont inadmissibles, puisque, si l'on renonce à la rectitude du rayon vecteur, la longueur du rayon vecteur n'a plus de sens. Les coordonnées triangulaires impliquent non seulement des angles qui doivent, à la limite, être rectilignes, mais des lignes droites, ou tout au moins certaines courbes bien définies. Or des courbes ne peuvent être définies métriquement que de deux manières : ou bien par rapport à la ligne droite, comme, par exemple, par leur courbure en chaque point; ou bien par des équations purement analytiques, qui présupposent un système intelligible de coordonnées métriques. Quelles sont les méthodes qui nous restent pour assigner ces valeurs arbitraires aux différents points? Bien plus, comment pourrions-nous obtenir une évaluation quelconque de la différence (pour éviter la notion plus spéciale de distance) entre deux points? La notion même du point devient illusoire. Lorsqu'on a un système de coordonnées, on peut définir un point par ses trois coordonnées; en l'absence d'un tel système, on peut définir la notion du point *en général* comme l'intersection de trois surfaces ou de deux

courbes. On prend ici les surfaces et les courbes comme des notions évidentes par intuition, mais si l'on veut s'en servir pour une définition numérique précise de points *particuliers*, il faut spécifier l'espèce de surface ou de courbe qu'on doit employer. Or, cela n'est possible, on l'a vu, qu'en présupposant soit la ligne droite, soit un système de coordonnées. Il s'ensuit que tout système de coordonnées présuppose la ligne droite, et est logiquement impossible sans elle.

177. Les trois axiomes précédents, nous l'avons vu, sont nécessaires *a priori* à la Géométrie métrique. Aucun autre ne peut être nécessaire, puisque des systèmes métriques, logiquement aussi inattaquables que celui d'Euclide, et portant sur des espaces également homogènes et également relatifs, ont été construits par les Métagéomètres sans l'aide d'aucun autre axiome. Les autres axiomes de la Géométrie euclidienne (l'axiome des parallèles, l'axiome qui fixe à trois le nombre de dimensions, et l'axiome de la ligne droite sous la forme d'Euclide : deux lignes droites ne peuvent pas enfermer un espace) ne sont pas essentiels à la possibilité de la Géométrie métrique, c'est-à-dire ne peuvent pas se déduire du fait qu'une science des grandeurs spatiales est possible. On doit plutôt y voir des lois empiriques obtenues, comme les lois empiriques des autres sciences, par l'étude positive de l'objet donné, qui est, dans ce cas, l'espace de notre expérience.

178. En résumant l'argument caractéristique de cette section, nous pouvons lui donner une forme plus générale, et rechercher les conditions de la mesure dans une multiplicité continue, c'est-à-dire les qualités nécessaires à cette multiplicité pour que les grandeurs y soient déterminables, non seulement dans leur inégalité, mais dans leurs rapports précis.

La mesure, pouvons-nous dire, est l'application du nombre au continu, ou, si l'on aime mieux, la transformation de la grandeur pure en nombre d'unités. En employant *grandeur* pour indiquer le vague plus ou moins, et *quantité* pour indiquer le nombre précis d'unités, le problème de la mesure peut

se définir comme la transformation de la grandeur en quantité.

Or, pour commencer, un nombre est un tout composé d'unités plus petites, toutes ces unités étant qualitativement semblables. Donc, pour qu'une grandeur continue puisse être exprimée comme nombre, il faut, d'une part, qu'elle soit elle-même un tout, et, d'autre part, qu'elle soit divisible en parties qualitativement semblables. Considérée comme un tout, la grandeur est *intensive;* considérée comme un agrégat de parties, elle est *extensive.* Une grandeur purement intensive ne peut donc pas être nombrée; une grandeur purement extensive, si l'on peut imaginer une telle grandeur, ne serait pas du tout une grandeur simple, puisqu'elle devrait consister en éléments complètement dépourvus de synthèse. Une grandeur mesurable est donc un tout divisible en parties semblables. Mais, dès qu'une grandeur continue est divisible, elle est nécessairement divisible *à l'infini.* Car autrement les points où elle pourrait être divisée formeraient des barrières naturelles, et détruiraient ainsi sa continuité. Bien plus, il ne suffit pas qu'il y ait une possibilité de division en parties extérieures les unes aux autres; si les parties, pour être perceptibles comme parties, doivent être extérieures les unes aux autres, il faut aussi, pour qu'elles puissent être connues comme parties *égales,* qu'on ait une méthode pour surmonter leur mutuelle extériorité. Pour cela, nous l'avons vu, on a besoin de la superposition, qui implique la libre mobilité et l'homogénéité : l'absence de libre mobilité dans le temps, où toutes les autres conditions de la mesure sont remplies, rend en effet impossible la mesure directe du temps. Ainsi la divisibilité à l'infini, la libre mobilité et l'homogénéité sont nécessaires pour la possibilité de la mesure dans n'importe quelle multiplicité continue, et, comme on l'a vu, elles équivalent à nos trois axiomes. Ces axiomes sont donc nécessaires, non seulement pour la mesure spatiale, mais pour toute mesure. La seule multiplicité donnée dans l'expérience où ces conditions soient satisfaites est l'espace. Toute autre mesure exacte (comme on pourrait le prouver, je crois, pour chaque cas particulier) s'effectue, comme on l'a vu dans le cas du temps, par réduction à un corrélatif spatial. Cela explique

l'importance énorme, pour la science exacte, de la conception mécaniste de la nature, qui réduit tous les phénomènes à des mouvements dans le temps et dans l'espace. Car le nombre est, de tous les concepts, celui sur lequel il est le plus facile d'opérer, et la science cherche partout une occasion de l'appliquer, mais elle ne trouve cette occasion qu'au moyen des équivalents spatiaux des phénomènes (¹).

179. Nous savons maintenant en quoi consiste l'élément *a priori* de la Géométrie. Cet élément *a priori* consiste dans les axiomes communs aux espaces euclidien et non-euclidiens, c'est-à-dire ceux qu'on peut déduire de l'idée d'une forme d'extériorité, ou, en Géométrie métrique, ceux que postule la possibilité de la mesure. Il reste à discuter, dans un dernier Chapitre, quelques questions d'un caractère philosophique plus général, où nous devrons abandonner le terrain solide des Mathématiques et entrer dans des spéculations que je n'avance qu'à titre d'essai, et avec peu de confiance dans leur valeur définitive. Les principales questions de ce dernier Chapitre seront les deux suivantes : 1° Comment une telle nécessité *a priori* et purement logique est-elle possible, en tant qu'elle est appliquée à un objet actuellement donné comme l'espace ? 2° Comment peut-on écarter les contradictions qui nous ont obsédé dans ce Chapitre, et qui naissent de la relativité, de la divisibilité et de l'extension illimitée de l'espace ? Ces deux questions nous sont imposées par le présent Chapitre, mais, comme elles soulèvent quelques-uns des problèmes fondamentaux de la Philosophie, il serait téméraire d'attendre une réponse concluante ou entièrement satisfaisante. On peut espérer quelques indications et suggestions, mais une solution complète ne peut être fournie que par une Philosophie complète, dont les aperçus sont bien trop vagues pour inspirer une grande confiance.

(¹) *Cf.* HANNEQUIN, *Essai critique sur l'hypothèse des atomes*, passim. Paris, Masson et Alcan, 1895.

CHAPITRE IV.

CONSÉQUENCES PHILOSOPHIQUES.

180. Dans le présent Chapitre, nous avons à discuter deux questions qui, bien que n'ayant guère un caractère géométrique, ont une importance capitale pour la théorie de la Géométrie proposée ci-dessus. La première de ces questions est celle-ci : Quel rapport une démonstration purement logique et déductive, comme celle qu'on a tirée de la nature d'une forme d'extériorité, peut-elle avoir avec un objet d'expérience tel que l'espace? Vous avez simplement créé, peut-on dire, un concept général qui contient l'espace comme espèce particulière, et vous avez alors montré, ce qui était évident d'avance, que ce concept général possède quelques-uns des attributs de l'espace. Mais quelle raison cela vous donne-t-il pour regarder ces attributs comme *a priori*? Le concept *mammifère* possède quelques-uns des attributs du cheval; mais ces attributs sont-ils pour cela des attributs *a priori* du cheval? La réponse à cette objection naturelle est si difficile, et elle implique tant de données de philosophie générale, que je l'ai réservée pour le Chapitre final, afin de ne pas interrompre le raisonnement sur les sujets spécialement géométriques.

181. J'ai déjà indiqué, en termes généraux, la raison qu'on a de regarder comme *a priori* les propriétés de toute forme d'extériorité. Cette raison est transcendantale, c'est-à-dire doit être tirée des conditions requises pour la possibilité de l'expérience. La forme d'extériorité est, comme les multiplicités de Riemann, un concept général de classe, qui comprend le temps aussi bien que les espaces euclidien et non-euclidiens. Toutefois, il n'est pas motivé, comme les multiplicités, par une ressemblance *quantitative* avec l'espace, mais par le fait qu'il

remplit (s'il a plus d'une dimension) toutes les fonctions que remplit l'espace dans notre monde actuel. Mais, pour cela, il faut qu'une forme d'extériorité soit, non un pur concept, mais une intuition dont on ait l'expérience actuelle. Par suite, le concept d'une telle forme est le *concept* général, sous lequel rentre toute *intuition* logiquement possible qui peut remplir la fonction actuellement remplie par l'espace. Et cette fonction est de rendre possible l'expérience de choses diverses, mais en relation réciproque. Une telle forme, dont le concept est compris sous notre forme d'extériorité, est donc nécessaire *a priori* à la perception sensible pour que nous ayons l'expérience d'une diversité en corrélation, et, sans l'expérience de cette forme, nous ne pourrions avoir aucune expérience, comme le montre la Logique moderne. Cela laisse encore intacte la question du rapport de l'*a priori* au subjectif : la forme d'extériorité est nécessaire à l'expérience, mais ce n'est pas une raison suffisante pour la déclarer purement subjective.

Voilà l'esquisse de l'argumentation qui remplira la première moitié de ce Chapitre ; c'est ainsi qu'on justifiera l'opinion qui regarde comme *a priori* ceux des axiomes de la Géométrie qu'on a déduits ci-dessus du concept d'une forme d'extériorité. C'est que ces axiomes, et ceux-là seuls, sont nécessairement vrais de tout univers où l'expérience est possible ([1]).

182. L'opinion indiquée a évidemment beaucoup de rapport avec la thèse de l'Esthétique transcendantale. En fait, on peut l'obtenir, je crois, tout entière en limitant et en interprétant d'une certaine manière les arguments classiques de Kant. Mais comme elle diffère, sur plusieurs points importants, des conclusions auxquelles tendait Kant, et que la ressemblance peut aisément paraître plus grande qu'elle n'est, je commencerai par une brève comparaison des deux thèses, et j'essaierai, en me référant à des critiques autorisées, d'établir que j'ai raison de me séparer de lui.

([1]) Comparer avec les paragraphes suivants l'admirable discussion de M. Hobhouse dans sa *Theory of knowledge,* Partie I, Chap. II. Methuen ; 1896.

183. En premier lieu, l'élément psychologique tient beaucoup plus de place dans la thèse de Kant que dans la mienne. Je soutiendrai, il est vrai, qu'une forme d'extériorité, pour remplir son office, ne doit pas être un pur concept ou une pure inférence, mais un élément donné dans la perception sensible; non pas, sans doute, donné primitivement isolé, mais découvrable par analyse, en portant l'attention sur l'objet de la perception sensible ([1]). Mais Kant soutenait, non seulement que cet élément est donné, mais encore qu'il est subjectif. Pour lui l'espace est, d'une part, non conceptuel, mais, d'autre part, non sensible. Il ne fait pas partie, pour lui, des données des sens, il leur est ajouté par une intuition subjective qu'il regarde comme antérieure (non seulement logiquement, mais psychologiquement) aux objets contenus dans l'espace ([2]).

Cette partie de l'argument de Kant est, pour nous, complètement hors de cause. Il ne nous importe pas de savoir si la forme d'extériorité est donnée dans la sensation ou dans une intuition pure, puisque nous négligeons la question de la connexion de l'*a priori* et du subjectif; d'ailleurs, la priorité temporelle de l'espace sur les objets qu'il renferme a été généralement reconnue comme étrangère à l'Épistémologie, et a souvent été regardée comme ne faisant pas partie de la thèse de Kant ([3]). Si l'on appelle intuitif tout ce qui est donné dans la perception sensible, alors on peut soutenir qu'une forme d'extériorité est nécessairement intuitive; mais que ce soit une intuition pure, au sens de Kant, ou non, cela nous est indifférent, ainsi que la priorité de l'espace sur les objets qu'il renferme.

Que la nature non sensible de l'espace ne soit pas une partie essentielle de la doctrine *logique* de Kant, c'est ce qui ressort d'un examen de ses arguments. Dans son Introduction, il a posé la distinction purement logique de la matière et de la

---

([1]) Je parle de perception sensible et non de sensation, afin de ne pas préjuger la solution de la question touchant la nature sensible de l'espace.

([2]) *Voir* VAIHINGER, *Commentar*, t. II, p. 86-87, 168-171.

([3]) *Voir* CAIRD, *Critical philosophy of Kant*, t. I, p. 287.

forme, mais, au moment même où il la pose, il lui donne une portée psychologique. C'est ce qu'il fait en affirmant que la forme dans laquelle la matière des sensations se trouve rangée ne peut pas elle-même être une sensation. Cela admis, il s'ensuit naturellement que l'espace ne peut pas être sensible. Mais cette supposition n'est nullement justifiée par l'argument, elle est manifestement posée comme un axiome évident par lui-même; elle a été sévèrement critiquée par Stumpf (1) et d'autres (2), et elle est considérée par Vaihinger (3) comme une pétition de principe fatale; elle est d'ailleurs étrangère à l'argument logique, quand on dépouille cet argument, comme nous l'avons fait, de toute connexion avec la subjectivité psychologique; enfin, elle nous laisse aux prises avec les théories psychologiques de l'espace, qui paraissent, depuis quelque temps, assez peu favorables à la pure doctrine kantienne.

184. Nous avons par conséquent le droit, dans une recherche épistémologique, de négliger la théorie psychologique de Kant (en tant, du moins, qu'elle distingue l'intuition spatiale de la sensation), et de faire plutôt attention à sa seule face logique. La partie de sa théorie psychologique qui soutient que l'espace n'est pas un pur concept est, avec certaines limitations, suffisamment évidente, appliquée à l'espace actuel; mais pour nous elle se transforme forcément en une thèse beaucoup plus difficile à soutenir, à savoir qu'*aucune* forme d'extériorité qui rend possible l'expérience d'une diversité en corrélation ne peut être purement conceptuelle. Cette question, à laquelle nous devrons revenir plus loin, n'est plus psychologique, elle relève entièrement de l'Épistémologie.

185. Que reste-t-il alors d'essentiel, pour notre objet, du premier argument de Kant en faveur de l'apriorité de l'espace? Son argument, sous la forme où il l'a énoncé, porte sur l'extériorisation des sensations. Pour que je puisse, dit-il, rapporter

(1) *Ursprung der Raumvorstellung*, p. 12-30.
(2) *Voir* les références dans VAIHINGER, *Commentar*, t. II, p. 76 et suiv.
(3) *Commentar*, t. II, p. 71 et suiv.

mes sensations à quelque chose hors de moi, il faut que j'aie déjà dans l'esprit la forme subjective de l'espace. Sous cette forme, comme le montre Vaihinger [1], l'argument repose sur une pétition de principe, car ce n'est que si les sensations étaient nécessairement non spatiales que leur extériorisation exigerait une forme spatiale subjective. Mais, au surplus, qu'est-ce que l'apriorité logique de l'espace a à voir avec l'extériorité des choses par rapport à nous?

A première vue, l'espace *paraît* remplir deux fonctions : d'une part, par la projection des sensations hors de nous, il montre les choses comme extérieures au moi, et, d'autre part, il montre les choses simultanément représentées comme extérieures les unes aux autres. Ces deux fonctions, bien qu'on les considère souvent comme coordonnées et presque équivalentes [2], me paraissent tout à fait différentes. Avant de discuter l'apriorité de l'espace, il faut, je crois, distinguer avec soin ces deux fonctions, et décider quelle est celle sur laquelle nous devons raisonner.

Or l'extériorité par rapport au Moi, semble-t-il, doit nécessairement soulever toute la question de la nature et des limites du Moi, et, qui plus est, elle ne peut pas dériver de la représentation spatiale, à moins d'assigner au Moi une position définie dans l'espace. Mais les choses n'acquièrent une position dans l'espace que lorsqu'elles peuvent apparaître dans la perception sensible ; si donc nous adoptons cette conception de la fonction de l'espace, nous sommes forcés de regarder le Moi comme un phénomène, objet de la perception sensible. Or cela réduit l'extériorité par rapport au Moi à l'extériorité par rapport au corps. Mais le corps est un objet représenté comme n'importe quel autre, et l'extériorité des objets par rapport à lui est, par suite, un cas particulier de l'extériorité réciproque des choses représentées. Par conséquent, nous ne pouvons pas regarder l'espace comme fournissant, primitivement du moins,

(1) *Commentar*, t. II, p. 69, 165.

(2) Par exemple, Caird, *op. cit.*, t. I, p. 286.

l'extériorité par rapport au Moi, mais seulement l'extériorité réciproque des choses représentées dans la perception sensible [1].

186. Telle est donc l'espèce d'extériorité que nous devons attendre de l'espace, et la question qui s'impose est celle-ci : L'existence de choses diverses, mais en relation mutuelle, serait-elle inconnaissable, s'il n'y avait pas, dans la perception sensible, quelque forme d'extériorité? Telle est la question cruciale, de laquelle dépend l'apriorité de notre forme, et, par suite, celle des axiomes nécessaires de la Géométrie.

187. L'argument réciproque du mien, celui qui conclut de l'élément temporel-spatial dans la perception à l'existence d'un monde de choses diverses, mais en corrélation, est développé tout au long dans la *Logique* de Bradley [2]. Il est résumé dans la phrase suivante : « Si l'espace et le temps sont continus, et si tout phénomène doit occuper quelque temps ou quelque espace (et il n'est pas difficile de soutenir ces deux thèses), nous pouvons aussitôt en tirer cette conclusion, qu'il n'existe pas de pur particulier. Tout phénomène existera en plusieurs temps ou en plusieurs espaces; et, en raison de cette diversité, il sera lui-même un universel [3]. » L'importance de ce fait apparaît quand on considère que, s'il existait un *pur* particulier quelconque, tout jugement et tout raisonnement portant sur ce particulier seraient impossibles, puisque tout jugement et tout raisonnement s'effectuent nécessairement au moyen d'uni-

(1) Je ne veux cependant pas nier que l'espace ne soit essentiel à la distinction ultérieure du Moi et du non-Moi.

(2) *Cf.* HANNEQUIN, *Essai critique sur l'hypothèse des atomes*, Livre II, Chap. I, § IV, p. 271 : « A la divisibilité essentielle de l'Espace nous devons donc déjà cette première notion que les choses sont multiples, qu'elles sont à tout le moins variées et diverses, et qu'elles le sont au delà de toute limite donnée ». Paris, Masson et Alcan, 1895. (*Note de M. Couturat.*)

(3) P. 44, note. *Voir* aussi Livre I, Chap. II, *passim*; spécialement p. 51 et suiv., et p. 70-71.

versaux. Or toute réalité est construite avec le *Ceci* (1) de la représentation immédiate, d'où partent nécessairement le jugement et le raisonnement. Mais, grâce à la continuité et à la relativité de l'espace et du temps, aucun *élément* ne peut être regardé ni comme simple, ni comme existant par lui-même. Tout *élément*, d'une part, peut se décomposer en d'autres *éléments*, et, d'autre part, se trouve nécessairement en relation avec d'autres choses, en dehors des limites de l'objet donné dans la perception sensible. Cette fonction de l'espace et du temps est présupposée dans l'assertion suivante de Bosanquet (2) : « La réalité m'est donnée *dans* la présente perception sensible, et *dans* le sentiment immédiat de ma propre existence sensible, qui l'accompagne. Le monde réel, en tant que système défini et organisé, est *pour moi* une extension de cette sensation et de cette conscience présentes au moyen du jugement, et c'est l'essence du jugement d'effectuer et de soutenir une telle extension.... Dans chaque jugement de perception, le sujet est une tache ou un point donné dans un contact sensible avec le Moi percevant. Mais, comme toute réalité est continue, le sujet n'est pas *uniquement* cette tache ou ce point donné. »

188. Cette théorie de Bradley et de Bosanquet est la réciproque de la thèse épistémologique que j'ai à plaider. Grâce à la continuité et à la relativité de l'espace et du temps, disent-ils, nous sommes capables de construire, par le jugement et le raisonnement, un monde systématique extrait de cette existence fragmentaire et pourtant nécessairement complexe qui est donnée dans la perception sensible. Réciproquement, je soutiens que, puisque toute connaissance est nécessairement dérivée d'une extension de l'*élément* de la perception sensible, et puisqu'une telle extension n'est possible que si cet *élément*

---

(1) En anglais : *This*. Nous traduirons, dans la suite, ce mot par *élément* en italique. Le mot « element » sera traduit par « élément ».

(*Note du trad.*)

(2) *Logic*, t. I, p. 77-78.

a ce caractère fragmentaire et pourtant complexe que confère une forme d'extériorité, il en résulte qu'une forme d'extériorité donnée avec cet *élément* est essentielle à toute connaissance, et, par suite, est logiquement *a priori*. Le raisonnement de Bradley, s'il est juste, prouve déjà cette thèse; car, tandis que, d'un côté, il n'emploie aucune autre propriété de l'espace et du temps que celles qui appartiennent à toute forme d'extériorité, il prouve, d'un autre côté, que le jugement et le raisonnement postulent que l'*élément* ne soit ni simple ni existant par lui-même. Mais, puisque ce point est d'une importance capitale, je vais essayer de reprendre cette démonstration sous une forme mieux appropriée que celle de Bradley à la question épistémologique.

189. L'essence de ma thèse est que, si l'expérience est possible, tout *élément* de sensation doit, lorsqu'on y fait attention, se trouver, d'une part, résoluble en *éléments*, et, d'autre part, dépendre d'une référence extérieure pour quelques-uns de ses attributs. La seconde de ces thèses dérive de la première, car si l'on prend un de ces *éléments* contenus dans l'*élément* primitif, on obtient un nouvel *élément* qui est nécessairement en relation avec les autres *éléments* qui composaient l'*élément* primitif. Je puis donc me borner à la première proposition, qui affirme que l'objet de perception doit contenir une diversité, non seulement de contenu conceptuel, mais d'existence, et qu'il ne peut être connu que si la perception sensible contient, à titre d'élément, quelque forme d'extériorité.

Mon raisonnement part de cette prémisse, que toute connaissance implique la reconnaissance d'une diversité dans une relation, ou, si l'on préfère, de l'identité dans la différence. J'emprunte cette prémisse à la Logique, comme résultant de l'analyse du jugement et du raisonnement. Pour prouver une telle prémisse, il faudrait un Traité de Logique; je suis donc forcé de renvoyer le lecteur aux Ouvrages de Bradley et de Bosanquet sur la matière. De cette prémisse il suit aussitôt que la connaissance serait impossible, si l'objet de l'attention n'était pas complexe, c'est-à-dire était un *pur* particulier. Or l'objet

mental (c'est-à-dire, dans ce cas, l'objet de connaissance) pourrait-il être complexe, si l'objet de la perception immédiate était toujours simple?

190. On pourrait être tenté, au premier abord, de répondre affirmativement à cette question. Mais plusieurs difficultés, je crois, s'opposeraient à une telle réponse. En premier lieu, la connaissance part nécessairement de la perception. Par conséquent, ou bien nous ne pouvons avoir aucune autre connaissance que celle de notre perception présente, ou bien nous devons être capables de l'opposer et de la comparer à quelque autre perception. Or, dans le premier cas, puisque, par hypothèse, la perception présente est un pur particulier, la connaissance en est impossible, conformément à notre prémisse. Mais dans le second cas, l'autre perception, à laquelle nous comparons la première, doit s'être présentée en un autre temps, et, avec le temps, nous avons déjà une forme d'extériorité. Mais, qui plus est, notre perception présente n'est plus un pur particulier. Car la faculté de la comparer à une autre perception implique qu'elles ont entre elles un point commun, ce qui les rend toutes deux complexes. En outre, le temps est nécessairement continu, et le présent, comme le montre Bradley, n'est pas un simple point de temps [1]. Ainsi notre perception présente contient, dans le présent apparent, la complexité qu'implique la durée : c'en est fait de sa pure particularité et de sa simplicité. C'en est fait également de son existence indépendante, car au delà du présent apparent se trouvent le passé et le futur, auxquels, par suite, notre perception présente se réfère inévitablement. Par conséquent le temps, tout au moins, est essentiel à cette identité dans la différence que postule toute connaissance.

191. Mais nous n'avons tiré de tout cela aucune raison pour affirmer une multiplicité de choses réelles, ou une forme d'extériorité à plus d'une dimension, laquelle, on l'a vu, était né-

[1] *Logic*, p. 51 et suivantes.

cessaire pour la vérité de deux de nos trois axiomes. Cela nous amène à cette question : Le temps seul, comme forme d'extériorité, suffit-il à la possibilité de la connaissance?

A cette question il faut, je crois, répondre par la négative. Avec le temps seul, nous l'avons vu, l'objet représenté est nécessairement complexe, mais sa complexité ne peut être, si je puis m'exprimer ainsi, qu'un pur accident. Sans une seconde forme d'extériorité, une seule chose peut être donnée à la fois ([1]), et cette seule chose, par suite, doit constituer la totalité de notre univers. L'objet de la perception passée doit être regardé comme la même chose dans un état différent, puisque notre unique objet n'a rien d'extérieur à lui qui puisse le créer ou le détruire. La complexité consistera donc seulement dans les états changeants de notre unique objet : elle sera accidentelle et non substantielle. Du reste, nous avons le dilemme suivant : Ou bien l'objet unique ne peut être que nous-mêmes, ou bien nous ne pourrons jamais avoir conscience de nous-mêmes. Mais la principale difficulté d'un tel monde résiderait dans les changements de l'objet. Qu'est-ce qui pourrait causer ces changements, puisque nous ne connaîtrions rien d'extérieur à notre objet? Ce serait comme une monade de Leibnitz, sans un Dieu extérieur à elle pour régler d'avance ses changements. Dans un tel monde, la causalité ne pourrait pas s'appliquer, et le changement serait complètement inexplicable.

Ainsi nous exigeons encore la possibilité d'une diversité de choses existant simultanément, et non pas simplement d'accidents successifs; et cela, nous l'avons vu, ne peut pas être fourni par le temps seul, mais seulement par une forme d'extériorité capable de recevoir les parties simultanées d'une représentation. En d'autres termes, nous ne pourrions jamais inférer l'existence de choses diverses, mais en relation réciproque, si l'objet de la perception sensible n'avait une complexité substantielle; or une telle complexité exige une forme d'extériorité autre que le temps. D'ailleurs, une telle forme, comme on l'a

---

([1]) Car l'*élément* donné, dans cette hypothèse, a une complexité purement temporelle, et n'est pas résoluble en *éléments* coexistants.

montré dans le Chapitre III (section A, § 135), ne peut remplir ses fonctions que si elle a plus d'une dimension. Dans notre monde actuel, cette forme est donnée par l'espace; dans tout autre monde connaissable pour des êtres qui possèdent nos lois intellectuelles, une telle forme, nous venons de le voir, est nécessairement donnée dans la perception sensible.

Cet argument peut se résumer brièvement, en admettant la théorie de Bradley, suivant laquelle toute connaissance est obtenue par une inférence fondée sur l'*élément* de la perception sensible. Car, s'il en est ainsi, il faut, pour rendre possible cette inférence, qui repose sur l'identité dans la différence, que l'*élément* soit lui-même complexe, et révèle à l'analyse des attributs qui aient une référence extérieure à lui-même. Mais, comme on l'a vu ci-dessus, cela ne peut se faire qu'au moyen d'une forme d'extériorité. De là il résulte que les axiomes *a priori* de la Géométrie ont nécessairement une portée objective et sont valables pour tout monde intelligible.

192. L'argument précédent, je l'espère, a expliqué pourquoi je crois possible de déduire d'un pur concept, tel que celui d'une forme d'extériorité, l'apriorité logique de certains axiomes par rapport à l'espace de notre expérience. Si notre raisonnement est juste, l'argument kantien était correct, en affirmant qu'une diversité réelle, dans notre monde actuel, ne peut être connue qu'au moyen de l'espace; il n'était erroné, au moins dans sa portée purement logique, qu'en négligeant la possibilité d'autres formes d'extériorité qui pourraient, si elles existaient, remplir la même fonction avec une égale efficacité. Par suite, en tant que l'espace diffère de ces autres concepts de formes d'intuition possibles, il est un pur fait d'expérience; mais, en tant que ses propriétés sont celles que toutes ces formes doivent nécessairement posséder, il est nécessaire *a priori* à la possibilité de l'expérience.

Je ne puis espérer, toutefois, que le lecteur ne trouve plus aucune difficulté dans cette déduction qui tire, de concepts abstraits, les propriétés d'une donnée actuelle dans la perception sensible. Considérons, par exemple, une propriété telle

que l'impénétrabilité. Supposer que deux choses occupent simultanément la même position dans une forme d'extériorité, c'est une contradiction logique ; mais pouvons-nous en dire autant de l'espace et du temps actuels? L'impossibilité n'est-elle pas, dans ce cas, une affaire d'expérience plutôt que de logique? Non, répondrai-je, si l'argument précédent est juste. Car, dans ce cas, nous inférons une diversité réelle, c'est-à-dire l'existence de choses différentes, uniquement d'une différence de position dans l'espace ou dans le temps. Il s'ensuit que supposer deux choses dans le même point de l'espace et du temps, c'est encore une contradiction logique : non parce que nous avons construit avec la logique les données sensibles, mais parce que la logique dépend, pour son application, de la nature de ces données. Cet exemple montre, ce que je voudrais rendre clair, à savoir que mon raisonnement ne prétend pas construire la perception sensible, dans sa richesse vivante, au moyen de « catégories exsangues », mais seulement établir que, si la perception sensible ne contenait pas un certain élément, ces catégories seraient impuissantes à l'étreindre.

193. Quant à savoir comment expliquer l'heureuse réalisation de ces postulats (soit par une harmonie préétablie, ou par une adaptation darwinienne au milieu ambiant, ou par la subjectivité de l'élément nécessaire de la perception sensible, ou par l'identité et l'unité fondamentales de nous et du reste de la réalité), c'est là une autre question, qui appartient plutôt à la Métaphysique qu'à notre ordre d'études présent. L'*a priori*, avons-nous dit sans cesse, est ce qui est nécessaire à la possibilité de l'expérience, et par là nous avons un criterium purement logique, donnant des résultats que seules la Logique et l'Épistémologie peuvent prouver ou infirmer. De savoir, au contraire, ce qui est subjectif dans l'expérience, c'est essentiellement une question de Psychologie, qui ne doit être tranchée que par des raisons psychologiques. C'est quand on aura répondu séparément à ces deux questions, mais pas avant, qu'on pourra avancer des théories touchant la relation de l'*a priori* et du subjectif; mais permettre à de telles théories

d'influencer notre décision sur l'une ou l'autre des deux questions précédentes, est sûrement propre à embrouiller la solution et à empêcher de distinguer nettement des points de vue radicalement différents.

194. J'arrive maintenant à la seconde question que ce Chapitre doit examiner, à savoir celle-ci : Que faut-il penser de ces contradictions qui s'imposaient à nous dans le Chapitre III, toutes les fois que nous touchions un point qui paraissait fondamental? Je traiterai cette question brièvement, vu que j'ai peu de chose à ajouter aux réponses qui sont familières à tout le monde. Je veux seulement prouver, premièrement, que les contradictions sont inévitables et, par suite, ne constituent pas d'objection à ma théorie; deuxièmement, que la première chose à faire pour les écarter est de restaurer la notion de la matière, conçue comme ce qui, dans les données de la perception sensible, est localisé dans l'espace et mis en relation par lui.

195. Les contradictions inhérentes à l'espace sont un thème fort ancien, aussi ancien, en fait, que les arguments de Zénon contre le mouvement. Elles sont, en gros, de deux espèces, bien qu'on ne puisse pas les séparer bien nettement. Il y a les contradictions inhérentes à la notion du continu, et les contradictions qui naissent du fait que l'espace, pour être connu, doit être une relativité pure et, en même temps, doit, semble-t-il, être quelque chose de plus que de pures relations, puisqu'il est un objet d'expérience immédiate. La première classe de contradictions est celle qu'on a rencontrée le plus fréquemment dans cet Essai; elle est aussi, je crois, la plus définie et la plus importante pour notre objet présent. Je doute, cependant, que les deux classes soient réellement distinctes, car on peut montrer, je crois, que tout continu dont les éléments ne sont pas des données, mais des constructions intellectuelles résultant d'une analyse, a le même caractère relatif et pourtant non complètement relatif qui appartient à l'espace.

Les trois contradictions suivantes, que je discuterai succes-

sivement, me semblent les plus importantes pour une théorie de la Géométrie.

1° Quoique les parties de l'espace soient intuitivement distinctes et aient des relations non symétriques qui révèlent entre elles une différence conceptuelle, aucun concept pourtant ne réussit à les différencier. De là naît une vaine recherche d'éléments qui puissent accomplir cette différenciation, et d'un tout dont les parties de l'espace seraient les composants. On obtient ainsi le point, ou le zéro d'étendue, comme élément spatial, et une régression à l'infini ou un cercle vicieux dans la recherche d'un tout.

2° Toutes les positions étant relatives, on ne peut les définir que par leurs relations, c'est-à-dire par les lignes droites ou les plans qui passent par elles; mais les lignes droites et les plans, étant tous qualitativement semblables, ne peuvent se définir que par les positions qu'ils mettent en relation. On aboutit encore ainsi à un cercle vicieux.

3° Il faut considérer les figures spatiales comme des relations. Mais une relation est nécessairement indivisible, tandis que les figures spatiales sont nécessairement divisibles à l'infini.

196. 1° **Points.** — L'antinomie du point (qui apparaît partout où est donné un continu où l'on doit chercher des éléments) est fondamentale en Géométrie. Veronese l'a énoncée, peut-être sans intention, comme le premier axiome, sous cette forme : « Il y a des points différents. Tous les points sont identiques [1]. » Nous avons vu, en étudiant la Géométrie projective, que les lignes droites et les plans doivent être regardés, d'une part comme des relations entre des points, et d'autre part comme composés de points [2]. Nous avons encore vu, en nous occupant de la mesure, que l'espace doit être regardé comme divisible à l'infini, et néanmoins comme une pure relativité. Mais ce qui est divisible et composé de parties, comme l'espace, doit conduire à la fin, par une analyse continue, à une

(1) *Op. cit.*, p. 226.

(2) Chapitre III, Section A, § 131.

partie simple et inanalysable, constituant l'unité de différenciation. Car tout ce qui peut être divisé, et a des parties, possède quelque substantialité, et doit, par suite, contenir deux unités ultimes, à savoir le tout, et le plus petit élément possédant la substantialité; or ce n'est évidemment pas le cas dans l'espace. Après avoir substantialisé l'espace, comme la Géométrie est forcée de faire, l'esprit réclame impérieusement des éléments, et insiste pour les avoir, que ce soit possible ou non. De cette exigence, toutes les applications géométriques du calcul infinitésimal sont la preuve [1]. Mais quelle espèce d'éléments obtenons-nous ainsi? L'analyse, incapable de trouver aucun point d'arrêt auparavant, trouve ses éléments dans les points, c'est-à-dire dans des quantités nulles d'espace. Un tel concept est une contradiction palpable, que seules rendent tolérable sa nécessité et sa familiarité. Un point est nécessairement spatial, car autrement il ne remplirait pas la fonction d'un élément spatial; mais en même temps il ne peut contenir aucun espace, car toute étendue finie est susceptible d'une analyse poussée plus loin. Les points ne peuvent jamais être donnés dans l'intuition, qui n'a rien à voir avec l'infiniment petit : ils sont une construction purement conceptuelle, issue de la nécessité de termes sur lesquels puissent porter les relations spatiales. Si l'espace était plus qu'une relativité, les relations spatiales devraient impliquer des termes spatiaux; mais aucun terme n'apparaît, tant que nous n'avons pas réduit par l'analyse nos données spatiales au néant. La notion contradictoire du point, comme d'une chose dans l'espace sans grandeur spatiale, est la seule issue à notre recherche de termes spatiaux pour les relations spatiales. Cette réduction à l'absurde suffit assurément par elle-même à prouver la relativité essentielle de l'espace.

197. Ainsi la Géométrie, voulant regarder l'espace comme indépendant, est forcée de substantialiser ses abstractions, et, par suite, d'inventer pour l'élément spatial une notion contra-

---

(1) *Cf.* HANNEQUIN, *Essai critique sur l'hypothèse des atomes*, Chap. I, Section III; spécialement p. 43 (Paris, 1895).

dictoire. Une absurdité semblable apparaît, encore plus évidemment, dans la notion d'un tout de l'espace. L'antinomie peut donc s'énoncer ainsi : Il faut, nous l'avons vu constamment, que l'espace soit une pure relativité, pour que la connaissance en soit possible ; mais il faut aussi, pour qu'on puisse en avoir une connaissance *indépendante*, telle que la Géométrie la demande, qu'il soit quelque chose de plus qu'une pure relativité, puisqu'il est divisible et a des parties. Mais nous avons vu dans le Chapitre III (Section A, § 133), que la connaissance d'une forme d'extériorité doit être logiquement indépendante de la matière particulière qui remplit la forme. Comment ferons-nous alors pour nous dégager de ce dilemme?

La seule manière, je crois, est, non pas de faire dépendre la Géométrie de la Physique, ce qui, nous l'avons vu, est une erreur [1], mais d'attribuer à toute proposition géométrique une certaine référence à une matière en général. Et, sur ce point, il faut faire une distinction importante. Nous avons jusqu'ici parlé de l'espace comme relatif, et des figures spatiales comme de relations. Mais l'espace, semble-t-il, est plutôt une relativité que des relations ; sans être lui-même une relation, il fournit la simple possibilité de relations entre diverses choses [2]. Appliqué à une figure spatiale, qui ne peut naître que d'une différenciation de l'espace, et, par suite, de l'introduction de quelque matière qui le différencie, le mot *relation* est peut-être moins équivoque que tout autre ; mais appliqué à l'espace vide et non différencié, il ne paraît en aucune manière en donner une définition exacte.

Mais une simple possibilité ne peut pas exister, ni être donnée dans la perception sensible! Que deviennent alors les arguments de la première partie de ce Chapitre? Ce n'est pas l'espace vide, répondrai-je, mais les figures spatiales que révèle la perception sensible, et les figures spatiales, comme nous venons de le voir, impliquent une différenciation de l'espace, et par conséquent une référence à la matière qui est dans l'espace.

---

[1] *Voir* Chapitre II, § 69 et suivants.

[2] *Voir* plus bas la troisième antinomie, § 201 et suivants.

C'est donc des figures spatiales, et non de l'espace vide, que la Géométrie a à s'occuper. L'antinomie discutée ci-dessus provient alors, semble-t-il, de la tentative de traiter de l'espace vide plutôt que des figures spatiales et de la matière à laquelle elles se réfèrent nécessairement.

198. Voyons si, par ce changement, nous pouvons résoudre l'antinomie du point. Les figures spatiales, dirons-nous à présent, sont des relations entre la matière qui différencie l'espace vide. Leur divisibilité, qui semblait contredire leur caractère relatif, peut s'expliquer de deux manières : premièrement, comme portant sur les figures considérées comme parties de l'espace vide, qui n'est pas lui-même une relation ; deuxièmement, comme dénotant la possibilité d'un changement continu dans la relation exprimée par la figure spatiale. Ces deux manières reviennent, au fond, au même ; car l'espace vide est une possibilité de relations, et la figure, considérée en connexion avec l'espace vide, devient ainsi une relation *possible*, à laquelle d'autres relations possibles peuvent être opposées ou comparées. Mais la seconde manière de regarder la divisibilité est la meilleure, puisqu'elle introduit une référence à la matière qui différencie l'espace vide, et sans laquelle les figures spatiales, et par suite la Géométrie, ne pourraient exister. Il faut donc conclure que c'est l'espace vide qui donne naissance à l'antinomie en question, car l'espace vide est une simple possibilité de relations homogènes et non différenciées, et partant complètement dépourvue de parties et de réalité. Parler des parties d'une possibilité est un non-sens ; les parties et les différenciations proviennent uniquement d'une référence à la matière qui est différenciée dans l'espace.

199. Mais quelle nature faut-il attribuer à cette matière, qui doit être impliquée dans toutes les propositions géométriques? En critiquant Helmholtz (1), on s'en souvient, nous avons décidé que la Géométrie se rapporte à une espèce de matière par-

(1) Chap. II, § 73.

ticulière et abstraite, qu'on regarde comme ne possédant aucune qualité causale, comme n'exerçant et ne subissant l'action d'aucune force. C'est de cette matière, je crois, que nous avons besoin pour le moment. Nous n'affirmons pas, sans doute, que la matière actuelle puisse être dépourvue des propriétés qui relèvent de la Physique, mais nous faisons abstraction de ces propriétés, comme étrangères à la Géométrie. Tout ce que nous demandons, pour notre besoin immédiat, c'est un substratum pour cette diversité que l'espace rend possible, ou des termes pour ces relations qui doivent différencier l'espace vide, si l'on veut étudier un espace quelconque. Mais comment faut-il concevoir la matière qui devra remplir cette fonction?

L'espace vide, avons-nous dit, est une possibilité de diversité en corrélation; mais les figures spatiales, dont la Géométrie s'occupe nécessairement, sont les relations actuelles rendues possibles par l'espace vide. Notre matière doit donc fournir des termes à ces relations. Il faut qu'elle soit différenciée, puisqu'une telle différenciation, nous l'avons vu, est l'œuvre propre de l'espace. Il faut donc trouver, dans cette matière, l'unité de différenciation ou l'atome (¹) que l'on ne peut pas trouver dans l'espace. Cet atome doit être simple, c'est-à-dire qu'il ne doit contenir aucune diversité réelle; il doit être un *élément* non résoluble en d'autres *éléments*. Étant simple, il ne peut contenir en lui-même aucune relation, et conséquemment, puisque les figures spatiales sont de pures relations, il ne peut pas apparaître comme une figure spatiale, car toute figure spatiale implique quelque diversité de matière. Mais cet atome doit avoir des relations spatiales avec d'autres atomes, puisque sa seule fonction est de fournir des termes à ces relations. Il est d'ailleurs capable d'avoir ces relations, puisqu'il est distingué des autres atomes. Ainsi l'on obtient pour les relations spatiales un terme inétendu, précisément de l'espèce requise. Tant que nous cherchions ce terme sans référence à quelque autre chose que l'espace, la notion contradictoire du point était le seul résultat

(¹) Il ne faut pas, évidemment, confondre cet atome avec l'atome de la Chimie.

de notre recherche; mais maintenant que nous admettons une référence à la matière différenciée par l'espace, nous trouvons aussitôt le terme dont nous avions besoin, à savoir, un élément simple non-spatial, ayant des relations spatiales avec d'autres éléments. Un tel terme apparaîtra à la Géométrie, en vertu de ses relations spatiales, comme un point; mais la contradiction inhérente au point, on le voit à présent, n'est que le résultat de l'abstraction illégitime qui constitue l'objet de la Géométrie.

200. 2° **Le cercle vicieux dans la définition de la ligne droite et du plan.** — Cette difficulté ne doit pas nous retenir longtemps, puisque, grâce à l'atome matériel, nous avons déjà rompu la relativité d'où provenait ce cercle. Les lignes droites, dans la méthode purement géométrique, ne sont définies que par des points, et les points que par des lignes droites. Mais à présent les points sont remplacés par des atomes matériels : la dualité des points et des lignes a donc disparu, et la ligne droite peut être définie comme la relation spatiale de deux atomes inétendus. Ces atomes ont des attributs spatiaux, dérivés de leurs relations avec d'autres atomes; mais ils n'ont pas d'attributs spatiaux *intrinsèques,* comme ils pourraient en posséder s'ils avaient une étendue ou une figure. Ainsi les lignes droites et les plans sont les vraies unités spatiales, et les points résultent seulement de la tentative de trouver, dans l'espace, pour des relations spatiales, les termes qui n'existent que dans une matière ultra-spatiale. Les lignes droites, les plans et les volumes sont les relations spatiales entre deux, trois ou quatre atomes inétendus, et les points sont une fiction géométrique de pure convention, qui remplace des atomes possibles. Car, puisque l'espace, comme on l'a vu, est une possibilité, la Géométrie ne s'occupe pas des relations spatiales actuellement réalisées, mais du schème total des relations possibles.

201. 3° **L'espace est à la fois relatif et plus que relatif.** — Nous avons déjà effleuré la question de savoir dans quelle mesure l'espace est autre chose que des relations, mais comme cette question est tout à fait fondamentale, que le mot *relation*

est ambigu et dangereux, et que j'ai fait constamment appel à la relativité de l'espace sans essayer de définir la relation, il sera nécessaire de discuter cette antinomie tout au long.

202. Or, pour cette discussion, il est essentiel de distinguer clairement l'espace vide et les figures spatiales. L'espace vide, comme forme d'extériorité, n'est pas un ensemble de relations actuelles, mais une possibilité de relations. Si on lui attribue une portée objective en le considérant comme le fondement, dans la réalité, de toute diversité en relation, on trouve aussitôt que l'espace est quelque chose qui, tout en fournissant la possibilité de toutes les relations, ne se compose pas lui-même de relations. En ce sens, l'espace doit être distingué de l'ordre spatial. L'ordre spatial, peut-on dire, présuppose l'espace, comme ce en quoi cet ordre est possible. C'est ainsi que Stumpf dit ([1]) : « Il n'y a ni ordre, ni relation sans un contenu absolu positif, qui en soit le support, et qui permette d'ordonner quelque chose de cette manière. Car, autrement, pourquoi et comment distinguerions-nous un ordre d'un autre?... Pour distinguer différents ordres les uns des autres, il faut toujours reconnaître un contenu absolu particulier, par rapport auquel l'ordre a lieu. Et de même l'espace n'est pas simplement un ordre, mais plus exactement ce par quoi l'ordre spatial, le fait d'être côte à côte (*Nebeneinander*), se distingue du reste. »

Ne pouvons-nous pas, alors, résoudre très simplement l'antinomie, en invoquant cette ambiguïté de l'espace? Bradley soutient ([2]) que, d'un côté, l'espace a des parties, et n'est pas, par suite, un ensemble de simples relations, mais que, d'un autre côté, lorsqu'on essaie de dire quelles sont ces parties, on trouve après tout qu'elles sont de simples relations. Mais l'espace qui a des parties ne peut-il pas être regardé comme l'espace vide, comme le contenu-substratum absolu de Stumpf, qui n'est pas de pures relations, tandis que les parties, en tant qu'elles se réduisent à de pures relations, sont les relations qui constituent

---

([1]) *Ursprung der Raumvorstellung*, p. 15.

([2]) *Appearance and Reality*, p. 36-37.

l'ordre spatial, et non l'espace vide? Si cela peut se soutenir, l'antinomie n'existe plus.

Mais, bien que cette explication me paraisse être le premier stade d'une solution, elle exigerait elle-même, je le crains, presque autant d'explications que la difficulté primitive. Car la relation de l'espace vide avec l'ordre spatial est elle-même une question pleine de difficultés, qu'on ne peut résoudre qu'avec beaucoup de peine.

203. Considérons ce qu'est l'espace vide. (Je parle de l'espace *vide,* sans que cela implique nécessairement l'absence de matière, mais seulement pour indiquer un espace qui n'est pas simplement un ordre de choses matérielles.) Stumpf le regarde comme donné dans la sensation; Kant, dans les deux derniers arguments de sa déduction métaphysique, prétend que c'est une intuition et non un concept, et qu'il doit être connu pour que l'ordre spatial devienne possible. Je veux établir, au contraire, qu'il est entièrement conceptuel; que l'espace est donné uniquement comme ordre spatial; que les relations spatiales, une fois données, paraissent être quelque chose de plus que de pures relations, et par là se substantialisent; que, quand elles sont substantialisées, leur collection tout entière est regardée comme contenue dans l'espace vide; mais que cet espace vide lui-même, s'il désigne quelque chose de plus que la possibilité logique de relations spatiales, est une hypothèse non nécessaire et contradictoire. Commençons par examiner les arguments de Kant sur ce point.

Leibnitz affirmait que l'espace n'est qu'un ensemble de relations, tandis que Newton soutenait la réalité objective de l'espace absolu. Kant a adopté un moyen terme : il a admis l'espace absolu, mais il l'a regardé comme purement subjectif. L'affirmation de l'espace absolu fait l'objet de son second argument; car si l'espace était simplement un ensemble de relations entre les choses, il disparaîtrait nécessairement avec les choses qu'il contient; mais c'est ce que nie ce second argument (¹).

(¹) *Voir* VAIHINGER, *Commentaire*, II, p. 189-190.

Or l'ordre spatial disparaît évidemment avec la matière, mais on peut admettre que l'espace absolu ou vide subsiste. C'est celui-ci que vise l'argument de Kant, et qu'il affirme être une intuition pure, nécessairement présupposée par l'ordre spatial (1).

201. Mais pouvons-nous consentir à regarder l'espace vide, le « tout infini donné », comme réellement donné? Ne faut-il pas, en dépit de l'argument de Kant, le regarder comme entièrement conceptuel? En premier lieu, cela ne résulte pas de l'argumentation de la première moitié de ce Chapitre, qui exige seulement que tout *élément* de la perception sensible soit résoluble en d'autres *éléments,* et par suite, implique seulement un ordre entre les *éléments,* et non quelque chose qui serait donné primitivement sans aucune référence à ces *éléments.* En second lieu, les deux arguments de Kant (2) destinés à prouver que l'espace vide n'est pas conceptuel restent en deçà du but. L'argument selon lequel les parties de l'espace ne sont pas contenues *sous* lui (3), mais *en* lui, prouve assurément que l'espace n'est pas un concept général, dont les figures spatiales seraient les cas particuliers; mais il ne s'ensuit nullement que l'espace vide ne soit pas un concept. L'espace vide est homogène et non différencié; les parties de l'espace, ou les figures spatiales, n'apparaissent que par référence à quelque matière différenciée, et partant appartiennent plutôt à l'ordre spatial qu'à l'espace vide. Si l'espace vide est la condition préalable de l'ordre spatial, on ne peut pas s'attendre à ce qu'il soit uni aux relations spatiales comme le genre aux espèces. Mais l'espace vide peut néanmoins être un concept universel; il peut être à l'ordre spatial dans le même rapport que l'État aux citoyens. Ceux-ci ne sont pas des cas particuliers de l'État, mais ils sont contenus en

---

(1) Voir *ibid.*, p. 224 et suiv., pour les inconséquences de Kant sur ce point.

(2) Le quatrième et le cinquième dans la première édition; le troisième et le quatrième dans la seconde.

(3) Comme les espèces sont dites contenues *sous* un genre, sont *subsumées* dans ce genre; en d'autres termes, les parties de l'espace n'en sont pas des spécifications. (*Note de M. L. Couturat.*)

lui; par suite, en un sens, ils le présupposent, car un homme ne peut devenir citoyen que par sa relation avec d'autres citoyens dans un État (¹).

L'unicité de l'espace, d'ailleurs, ne paraît guère être une preuve valable de sa nature intuitive; la regarder comme un argument impliquerait, en effet, que tous les concepts sont tirés par abstraction d'une série de cas particuliers, thèse qui a été critiquée dans le Chapitre II (§ 77), et qui n'a pas besoin d'être discutée davantage ici (²). Il n'y a donc, dans les deux arguments de Kant en faveur de la nature intuitive de l'espace vide, aucune raison qui puisse résister à la critique.

205. Une autre raison pour condamner l'espace vide se trouve dans les antinomies mathématiques. En effet, comme le montre Lotze (³), ce n'est pas les résoudre que de regarder l'espace vide comme purement subjectif : des contradictions dans une intuition subjective nécessaire constituent une aussi grande difficulté que dans toute autre chose. Mais ces antinomies apparaissent seulement par rapport à l'espace vide, et non par rapport à l'ordre spatial considéré comme un agrégat de relations. Car ce n'est que lorsqu'on regarde l'espace comme possédant quelque réalité, qu'on peut en demander la totalité ou l'élément véritable. C'est ce que nous avons déjà vu à propos du point. Quand on regarde l'espace, dans la mesure où il est valable, comme n'étant que l'ordre spatial, l'étendue illimitée et la divisibilité à l'infini disparaissent à la fois. Ce qui est divisé, ce n'est pas les relations spatiales, mais la matière; et si la matière, comme nous avons vu que la Géométrie le demande, consiste en atomes inétendus ayant des relations spatiales, il n'y a pas de raison pour regarder la matière, soit comme divisible à l'infini, soit comme consistant en atomes d'étendue finie.

206. Mais d'où provient, dans cette théorie, le paradoxe qui

(¹) *Cf.* Vaihinger, *Commentaire*, II, p. 218.
(²) *Cf.* Vaihinger, *Commentaire*, II, p. 207.
(³) *Metaphysik*, livre II, Chap. I, § 106.

consiste en ce que nous ne pouvons nous empêcher de regarder l'espace comme ayant plus ou moins de réalité, et comme divisible à l'infini? Ce paradoxe ne peut s'expliquer, je crois, que comme une illusion psychologique inévitable, qui naît du fait que les relations spatiales sont immédiatement représentées. Elles ont ainsi une qualité psychique particulière, à titre d'expériences immédiates; c'est grâce à cette qualité qu'on peut les distinguer des relations temporelles ou de tout autre ordre dans lequel les choses peuvent être rangées. Pour Stumpf, qui étudie un problème psychologique, cette qualité psychique constituerait un contenu-substratum absolu, et justifierait pleinement sa thèse; mais pour nous, qui étudions un problème épistémologique, il n'en est pas de même : cette qualité donnerait à l'élément spatial, dans la perception sensible, une *signification* qui n'implique nullement un espace absolu ou vide (¹). Ne peut-on pas, alors, abandonner l'espace vide et dire : L'ordre spatial consiste en relations *senties;* en tant que senti, il a pour la Psychologie une existence qui n'est pas entièrement résoluble en relations, et qui *paraît* inévitablement être plus que de simples relations. Mais quand nous examinons les informations que la perception sensible nous donne au sujet de l'espace, nous nous trouvons plongés en des contradictions, dès que nous admettons que ces informations consistent en quelque chose de plus que des relations. Cela ne laisse subsister que l'ordre spatial, et réduit l'espace vide à n'être qu'un simple nom pour la possibilité logique de relations spatiales.

207. La divisibilité apparente des relations qui constituent l'ordre spatial peut alors s'expliquer de deux manières, qui sont du reste équivalentes au fond. On peut considérer la relation en connexion avec l'espace vide, et dans ce cas, elle devient plus qu'une relation; mais comme elle est faussement substantialisée, elle apparaît comme une chose complexe, nécessairement composée d'éléments, qui pourtant n'émergent nulle part,

(¹) *Cf.* JAMES, *Psychology*, vol. II, p. 148 et suiv.

tant que l'analyse n'a pas réduit la pseudo-chose à néant, et abouti au point. En ce sens, la divisibilité des relations spatiales est une illusion inévitable. Ou bien encore, on peut prendre la relation en connexion avec les atomes matériels qui en sont les termes. Dans ce cas, on peut imaginer d'autres atomes différemment localisés par des relations spatiales différentes. S'ils sont localisés sur la ligne droite qui joint deux des atomes primitifs, cette ligne droite paraît divisée par eux. Mais la relation primitive n'est pas réellement divisée : tout ce qu'il y a, c'est que deux ou plusieurs relations équivalentes l'ont remplacée, de même que deux relations de père à fils, réunies, peuvent remplacer la relation équivalente de grand-père à petit-fils. Ces deux manières de considérer la divisibilité apparente sont équivalentes : car l'espace vide, en tant qu'il n'est pas une illusion, désigne simplement l'agrégat des relations spatiales possibles. Par suite, regarder une figure de l'espace vide comme divisée, signifie (si tant est que cela signifie quelque chose) regarder deux ou plusieurs autres relations possibles comme lui étant substituées, ce qui constitue la seconde manière de considérer la question.

Ainsi la même référence à une matière, par laquelle on a résolu l'antinomie du point, résout aussi l'antinomie touchant la nature relative de l'espace. Pour que l'espace soit exempt de contradictions, il faut le considérer exclusivement comme ordre spatial, comme ensemble de relations entre des atomes matériels inétendus. Quant à l'espace vide, qui naît, par une illusion inévitable, de l'élément spatial de la perception sensible, on peut, si l'on veut le conserver, le considérer comme un simple principe de relativité, comme la simple possibilité logique de relations entre diverses choses. En ce sens, l'espace vide est entièrement conceptuel ; l'ordre spatial seul est objet d'expérience immédiate.

208. Mais en quel sens l'ordre spatial consiste-t-il en relations ? Nous avons jusqu'ici parlé de l'extériorité comme d'une relation et, en un sens, cette façon de parler est justifiée. L'extériorité, quand on l'affirme de quelque chose, est un attribut

de cette chose, et implique une référence à quelque autre chose. Dans cette mesure, donc, l'extériorité est analogue aux autres relations; or c'est seulement dans cette mesure qu'elle a été regardée comme une relation dans nos raisonnements précédents. Mais lorsqu'on tient compte d'autres qualités des relations, l'extériorité commence à paraître, non plus comme une relation, mais plutôt comme une face ou un élément nécessaire de toute relation. Et cela est confirmé par le fait qu'une forme d'extériorité donnée est nécessaire à l'existence de relations quelconques.

Toute relation, pouvons-nous dire, implique une diversité entre ses termes, mais aussi quelque unité. La pure diversité ne fournit pas de fondement pour cette action réciproque et cette mutuelle dépendance qu'exige une relation. La pure unité rend les termes identiques, et détruit ainsi la référence de l'un à l'autre qu'exige la relation. La pure extériorité, prise abstraitement, fournit seulement l'élément de diversité que requiert la relation, et est partant plus abstraite qu'aucune relation actuelle. Mais la pure diversité ne donne pas ce tout indivisible que constitue nécessairement toute relation actuelle, et par suite, lorsqu'on la regarde abstraitement, elle n'est pas sujette aux conditions restrictives des relations ordinaires.

Mais avec la diversité pure, il semble que nous soyons revenus à l'espace vide, et que nous ayons abandonné l'ordre spatial. Assurément, la diversité pure ne peut qu'être complète ou ne pas exister : parler de degrés de diversité, ou d'une mesure quantitative de la diversité, est un non-sens. On ne peut donc pas réduire l'ordre spatial à la diversité pure. Si deux choses occupent des positions différentes dans l'espace, elles sont nécessairement différentes, mais elles sont aussi nécessairement quelque chose de plus, car autrement l'ordre spatial perdrait toute signification.

Ainsi l'espace vide, entendu au sens précédent, comme la possibilité de relations spatiales, ne contient qu'une seule face de la relation, à savoir la face de la diversité; mais l'ordre spatial, par sa référence à la matière, est plus concret et contient, en outre, un élément d'unité qui provient de la con-

nexion des différents atomes matériels. L'ordre spatial consiste donc en relations au sens ordinaire; mais son élément purement spatial (si l'on peut faire une telle distinction), c'est-à-dire l'élément qu'on peut, en faisant abstraction de la matière, regarder comme constituant l'espace vide, n'est qu'une face d'une relation, mais une face qui, dans le concret, doit être inséparablement liée avec l'autre face. C'est là, encore une fois, que nous voyons le principe des contradictions inhérentes à l'espace vide, et la raison pour laquelle l'ordre spatial est exempt de ces contradictions.

Conclusion.

209. Maintenant que nous avons achevé notre examen des fondements de la Géométrie, il sera bon, avant de quitter le sujet, de revoir et de récapituler brièvement les résultats que nous avons obtenus.

Dans le premier Chapitre, nous avons étudié le développement d'une branche des Mathématiques, qui n'était destinée primitivement qu'à établir l'indépendance logique de l'axiome euclidien des parallèles, et la possibilité d'une Géométrie conséquente avec elle-même édifiée sans cet axiome. Nous avons vu le développement ultérieur du sujet s'embarrasser, pour quelque temps, dans les controverses philosophiques; ayant montré qu'un axiome était superflu, les géomètres de la seconde période espéraient prouver la même chose de tous les autres, mais ils ne réussirent pas à construire un système affranchi des trois axiomes fondamentaux. Comme ils s'occupaient de Géométrie analytique et métrique, ils tendaient à considérer l'Algèbre comme *a priori*, et croyaient que les propriétés des grandeurs spatiales qui ne peuvent se déduire des lois de l'Algèbre sont nécessairement empiriques. Dans tout cela, ils visaient autant à discréditer Kant qu'à faire avancer les Mathématiques. Mais, avec la troisième période, l'intérêt pour la Philosophie diminue, l'opposition à Euclide devient moins marquée et, ce qui est le plus important de tout, la mesure n'est plus regardée comme fondamentale et l'on traite l'espace par la méthode descriptive

plutôt que par la méthode quantitative. Néanmoins, tous les géomètres conservèrent encore trois axiomes, les mêmes, en substance, que ceux que l'on avait conservés dans la seconde période.

Dans le second Chapitre, nous avons essayé, en critiquant quelques philosophies de la Géométrie, de préparer le terrain pour une théorie constructive de la Géométrie. Nous avons vu que Kant, en appliquant l'argument de l'Esthétique transcendantale à l'espace, est allé trop loin, puisque la portée logique de cet argument ne s'étend qu'à une forme d'extériorité en général. Nous avons vu que Riemann, Helmholtz et Erdmann, égarés par leur tendance quantitative, ont négligé le substratum qualitatif, que requièrent tous les jugements de grandeur et ont ainsi méconnu la direction dans laquelle on devait trouver les axiomes nécessaires de la Géométrie. Nous avons aussi rejeté l'opinion de Helmholtz suivant laquelle la Géométrie dépendrait de la Physique, parce que nous nous sommes aperçus que la Physique, pour devenir possible, présuppose nécessairement la connaissance de la Géométrie. Mais nous avons admis, en Géométrie, une référence à la matière; non pas, sans doute, à la matière empiriquement connue de la Physique, mais à une matière plus abstraite, dont la seule fonction est d'apparaître dans l'espace et de fournir des termes aux relations spatiales. A côté de cela, pourtant, nous avons admis que toute mesure *actuelle* ne peut s'effectuer qu'au moyen d'une matière *actuelle*, et n'est possible qu'empiriquement, par la connaissance empirique de corps approximativement rigides. En critiquant Lotze, nous avons vu que le sens le plus important dans lequel les espaces non-euclidiens soient possibles, est le sens philosophique, à savoir qu'ils ne peuvent être condamnés par aucun argument *a priori* fondé sur la nécessité de l'espace pour l'expérience, et que, par conséquent, si l'on n'en affirme pas l'existence, ce ne peut être que pour des raisons empiriques. Quant aux objections que Lotze adresse aux procédés mathématiques de la Métagéométrie, elles nous ont paru être entièrement dues à l'ignorance du sujet.

Passant, dans le troisième Chapitre, à une théorie construc-

tive de la Géométrie, nous avons vu que la Géométrie projective, qui n'a aucune référence à la grandeur, est nécessairement vraie de toute forme d'extériorité. Ses trois axiomes (homogénéité, dimensions et ligne droite) ont été tous déduits du concept d'une forme d'extériorité et ont été tous déclarés *a priori*, attendu qu'une telle forme est nécessaire à l'expérience. Dans la Géométrie métrique, au contraire, nous avons trouvé un élément empirique, qui naît de l'alternative entre les espaces euclidien et non-euclidiens. Il subsistait encore trois axiomes *a priori* communs à ces espaces et qui sont les conditions nécessaires de la possibilité de la mesure; ce sont : l'axiome de Libre Mobilité, l'axiome suivant lequel l'espace a un nombre entier fini de dimensions, et l'axiome de la distance. A part l'idée nouvelle du mouvement, ceux-ci nous ont paru équivalents aux trois axiomes projectifs et, par suite, nécessairement vrais de toute forme d'extériorité. Mais les autres axiomes d'Euclide (l'axiome des trois dimensions, l'axiome suivant lequel deux lignes droites ne peuvent jamais enfermer un espace, et l'axiome des parallèles) ont été regardés comme des lois empiriques qui dérivent de l'étude et de la mesure de notre espace actuel, et qui ne sont vraies, en ce qui concerne les deux derniers, que dans les limites des erreurs d'observation.

Dans le dernier Chapitre, nous avons complété notre démonstration de l'apriorité des axiomes projectifs et des axiomes métriques équivalents, en montrant la nécessité, pour l'expérience, d'une forme d'extériorité qui soit donnée par la sensation ou l'intuition, et qui ne soit pas simplement inférée d'autres données. Sans cela, avons-nous dit, on ne pourrait pas avoir la connaissance de choses différentes mais en relation réciproque, qui est la pierre angulaire de toute expérience. Enfin, nous avons discuté les contradictions qui naissent de la relativité et de la continuité de l'espace, et essayé de les résoudre par une référence à la matière. Cette matière, selon nous, doit consister en atomes inétendus, localisés par leurs relations spatiales, et apparaissant, en Géométrie, sous forme de points. Mais les attributs non spatiaux de la matière, avons-nous soutenu, ne relèvent pas de la Géométrie, et ses propriétés causales peuvent

être laissées de côté. Pour élucider les nouvelles contradictions qu'implique cette notion de la matière, il faudrait un autre ouvrage, qui nous conduirait, en passant par la Cinématique, dans le domaine de la Dynamique et de la Physique. Mais nous n'avions à discuter que les difficultés spéciales de l'espace, et c'est tout ce que nous pouvions faire dans un essai sur les fondements de la Géométrie.

LEXIQUE PHILOSOPHIQUE (¹),

PAR M. L. COUTURAT.

ACCIDENT, *voir* SUBSTANCE.

ANALYTIQUE, SYNTHÉTIQUE. — Un jugement : « A est B » est dit *analytique*, quand le prédicat B est contenu implicitement dans le sujet A, et peut en être dégagé par une simple *analyse* logique; plus exactement, quand le concept B fait partie de la compréhension du concept A. Il est dit *synthétique* dans le cas contraire, quand le sujet n'implique pas le prédicat, ou quand le prédicat n'est pas inhérent au sujet. D'une manière générale, un jugement est *analytique* lorsque le prédicat est uni au sujet par une identité partielle; aussi le fondement de tous les jugements analytiques est-il le *principe d'identité* ou le *principe de contradiction*. Par suite, on a un criterium commode et sûr pour reconnaître si un jugement est analytique ou synthétique : il est analytique, si sa négation implique une contradiction intrinsèque ou entraîne des conséquences contradictoires entre elles; dans le cas contraire, il est synthétique. Ainsi le fondement des jugements synthétiques ne peut pas être un des principes logiques précités, mais doit être lui-même un principe synthétique. Il faut bien remarquer, en effet, que pour qu'un jugement soit analytique, il ne suffit pas qu'il puisse se déduire logiquement d'autres jugements, et, en dernière analyse, de quelques principes admis comme évidents; il faut que ces principes eux-mêmes soient analytiques, sinon, toutes leurs conséquences logiques sont synthétiques comme eux. C'est pourquoi Kant a pu soutenir que tous les jugements mathématiques sont synthétiques. Comme exemple de jugement analytique, il cite celui-ci : « Tous les corps sont étendus », et comme exemple de jugement synthétique celui-ci : « Tous les corps sont pesants », attendu que les corps possèdent par essence ou par définition l'étendue, mais non

(¹) Un astérisque * renvoie à l'article du *Lexique* qui est consacré au mot précédent.

le poids. (*Cf. Critique de la raison pure,* Introduction, § IV, et *Prolégomènes à toute Métaphysique future,* Avant-propos, § 2.)

Apodictique, *voir* Assertorique.

A priori, Empirique. — Une connaissance est dite *empirique* quand elle provient de l'expérience, c'est-à-dire de la sensation et de la perception, ainsi que des opérations intellectuelles qui ne font qu'élaborer les données des sens (mémoire, association, abstraction, généralisation). Elle est dite *a priori,* quand elle est indépendante de l'expérience. Par opposition, la connaissance empirique est parfois appelée *a posteriori.* Il faut bien prendre garde que ces termes n'indiquent pas une priorité ou une postériorité *chronologiques,* mais simplement *logiques.* Kant reconnaît expressément que « toute notre connaissance commence *avec* l'expérience ». Mais il soutient néanmoins qu' « elle ne résulte pas pour cela tout entière *de* l'expérience ». Aussi son criterium de l'apriorité est-il purement logique : une connaissance *universelle* et *nécessaire** ne peut, suivant lui, venir de l'expérience, et est par conséquent *a priori.* (*Critique de la raison pure,* Introduction, §§ I et II.)

L'Auteur a exposé lui-même (§ 5) son criterium de l'apriorité, analogue à celui de Kant, mais plus rigoureux et plus précis : est *a priori,* pour lui, toute connaissance nécessaire à l'expérience, c'est-à-dire sans laquelle l'expérience ne serait pas possible (*cf.* le mot Esthétique). Comme il ne s'agit pas d'une antériorité chronologique de l'*a priori* par rapport à l'expérience, on comprend que la question ne puisse se résoudre ni par l'expérience interne (observation de conscience), ni par l'expérience externe (étude historique et descriptive de l'évolution mentale de l'individu ou de la race). C'est pourquoi, selon l'Auteur, la Psychologie est radicalement incompétente pour résoudre le problème de l'*a priori,* qui relève uniquement de l'Épistémologie*. La question ne se pose d'ailleurs que pour les jugements synthétiques*, car tout jugement analytique* est essentiellement *a priori.*

Assertorique, Apodictique. — Au point de vue de la *modalité,* les jugements se divisent en *problématiques, assertoriques* et *apodictiques* (ἀποδεικτικός, de ἀπόδειξις = démonstration). Les jugements problématiques sont ceux dont l'affirmation est conçue comme simplement *possible.* Les jugements assertoriques sont ceux dont l'affirmation est conçue comme *vraie,* comme correspondant à la *réalité;*

c'est ce qu'on appelle les *vérités de fait*. Les jugements apodictiques sont ceux dont l'affirmation est conçue comme *nécessaire**, de sorte que l'affirmation contraire est considérée comme impossible. A ces trois espèces de jugements correspondent les trois *catégories* ou concepts *a priori* de la modalité, c'est-à-dire les trois degrés de toute affirmation : la *possibilité*, la *réalité* et la *nécessité*. Ces trois *modes* de la pensée s'appliquent à tous nos jugements ; ils expriment, non pas une qualité de chaque objet d'expérience, mais seulement son rapport à notre faculté de connaître, autrement dit, la manière dont nous connaissons son existence et la mesure dans laquelle nous pouvons l'affirmer.

Empirique, *voir* A priori.

Épistémologie (en anglais : *Epistemology*). — Ce terme, qui signifie étymologiquement *théorie des Sciences* (ἐπιστήμη, λόγος), correspond au mot allemand *Erkenntnisstheorie* ou *Erkenntnisslehre* (Théorie de la connaissance) et à l'expression française *Philosophie des Sciences*.

Il désigne une partie fondamentale de la Philosophie, que l'on confond à tort, en France, avec la Psychologie ou avec la Logique. Elle se distingue de la Psychologie en ce qu'elle est, comme la Logique, une science *normative* (Wundt), c'est-à-dire qu'elle a pour objet, non les lois empiriques de la pensée telle qu'elle existe en fait, mélange de vérité et d'erreur, mais les lois idéales (règles ou *normes*) auxquelles la pensée doit se conformer pour être correcte et vraie. Elle se distingue de la Logique formelle en ce que celle-ci étudie les règles *formelles* ou les principes *directeurs* auxquels la pensée doit obéir pour être conséquente et rester d'accord avec elle-même, tandis que l'Épistémologie recherche les principes *constitutifs* de la pensée, qui lui fournissent un point de départ et un contenu réel et lui assurent une valeur objective*. Enfin, elle se distingue de la Logique appliquée ou Méthodologie en ce que celle-ci étudie les méthodes propres aux divers sciences, tandis que l'Épistémologie recherche les principes (axiomes, hypothèses ou postulats) qui leur servent de fondement, et en discute la valeur et l'origine (empirique ou *a priori**). En résumé, l'Épistémologie est la théorie de la connaissance appuyée sur l'étude critique des Sciences, ou, d'un mot, la *Critique* telle que Kant l'a définie et fondée.

Esthétique transcendantale. — C'est le titre de la première

partie de la *Critique de la raison pure*. Kant appelle *transcendant* tout ce qui est relatif aux choses en soi, ou ce qui dépasse le domaine des phénomènes. Il appelle *transcendantal* tout ce qui est relatif aux éléments *a priori** de la connaissance, ou ce qui dépasse les données de l'expérience (des sens). Il appelle donc *Philosophie transcendantale* le système de tous les principes *a priori* de la connaissance, dont la recherche et la vérification constituent la critique de la raison pure (spéculative). Cette vérification ou justification des principes *a priori* s'effectue par la *déduction transcendantale*, qui consiste à démontrer que le principe (ou le concept, ou la forme) en question est une condition nécessaire de toute expérience possible, et par conséquent est *a priori**. Comme il y a deux facultés de connaître, l'entendement et la sensibilité (les sens), la *Critique* se divise en une théorie de l'entendement, qui est la *Logique transcendantale*, et une théorie de la sensibilité, qui est l'*Esthétique transcendantale* (αἰσθητική, de αἴσθησις = sensation). Celle-ci a pour objet d'établir que toutes les données des sens sont soumises à deux formes *a priori*, qui sont l'espace et le temps. Elle est donc la théorie des formes *a priori* de la sensibilité, et n'a rien de commun avec ce qu'on entend aujourd'hui par *Esthétique*, à savoir la théorie du beau et de l'art.

Hypothétique. — Un jugement hypothétique est un jugement complexe qui se compose de deux jugements simples, et qui affirme que le premier est la condition du second, de sorte que la vérité du premier entraîne celle du second. Il a en général la forme suivante : « Si A est vrai, B est vrai. » Le jugement A s'appelle l'*hypothèse* ou l'*antécédent*, le jugement B, la *thèse* ou le *conséquent*. Le jugement hypothétique n'affirme ni A, ni B, mais seulement la connexion de A et de B, la dépendance de B par rapport à A. Il se distingue ainsi du jugement *catégorique*, qui consisterait, par exemple, à affirmer A ou B sans condition. D'autre part, un jugement hypothétique peut être apodictique*, c'est-à-dire affirmer une liaison nécessaire* entre les deux jugements A et B; c'est ce qui a lieu, notamment, si B est une conséquence logique (analytique*) de A. Il ne s'ensuit pas que le conséquent B soit lui-même un jugement apodictique (nécessaire) ni même assertorique (vrai). Il n'est qu'hypothétiquement nécessaire, c'est-à-dire sous la condition que l'antécédent A soit vrai. C'est là ce que signifie cette assertion de l'auteur, que « toute nécessité est hypothétique » (§ 6).

Nécessaire. — Ce mot a en Philosophie un sens très fort et très précis; il s'applique, soit aux êtres ou objets, soit aux vérités ou jugements. Un être nécessaire est celui qui ne peut pas ne pas être; l'existence nécessaire exclut toute possibilité de non-existence, et par suite est éternelle. Une vérité nécessaire est une proposition qui ne peut pas ne pas être vraie, dont le contraire est impossible ou inconcevable, ce qui ne veut pas toujours dire contradictoire : en effet, la négation d'un jugement analytique est seule *contradictoire;* la négation d'un jugement synthétique nécessaire est simplement *absurde*. Tout jugement analytique est donc nécessaire; un jugement synthétique, au contraire, peut être nécessaire ou ne pas l'être; mais s'il l'est, il doit, selon Kant, être *a priori**. Chez les philosophes classiques, les jugements nécessaires s'appellent souvent des *vérités éternelles*, par analogie avec l'être nécessaire. Pour la nécessité *hypothétique*, *voir* ce dernier mot.

Objectif, *voir* Subjectif.

Subjectif, Objectif. — En Psychologie, on appelle *objet* tout ce qui est connu ou perçu, et *sujet* ce qui connaît ou perçoit. Cette distinction ne coïncide pas avec celle qui est courante en Physiologie, où le *sujet* désigne le corps de l'individu qui perçoit, et l'*objet*, les corps extérieurs. Pour la Psychologie, le corps du sujet est encore un *objet*, attendu qu'il ne lui est connu que par les sensations qu'il lui fait éprouver; le *sujet* est essentiellement la conscience, le *moi* sentant et pensant. Par suite, tout ce qui réside dans la conscience est *subjectif*, et cela seulement, à savoir les phénomènes psychologiques; tout ce qui se passe dans le corps du sujet ou dans les autres corps est *objectif :* tels sont notamment tous les phénomènes physiologiques.

De cette distinction en dérive une autre, qui est celle de l'Auteur (§ 2) : on appellera une donnée *subjective* ou *objective*, suivant qu'elle a une *origine* subjective ou objective, c'est-à-dire suivant qu'elle provient de la conscience et de la réflexion du sujet, ou bien de la sensation, de la perception dite *extérieure*, parce qu'elle a pour objet les corps extérieurs.

Enfin, quand on parle de la valeur ou de la portée *objective* d'une pensée ou d'une connaissance, on entend par là qu'elle a un objet ou qu'elle correspond à une réalité. On a traduit par cette expression la locution anglaise « *existential import* », qui signifie que la

connaissance en question porte sur un objet réel, qu'elle en affirme ou en implique l'*existence*. Ainsi, la Géométrie n'a qu'une portée idéale ou subjective, tant qu'elle spécule sur les figures abstraites construites par l'imagination ; mais elle a une portée réelle ou objective, dès qu'elle s'applique aux figures concrètes données dans l'expérience, c'est-à-dire aux corps matériels qu'étudie la Physique.

Substance, Accident. — Ces termes sont employés par l'Auteur dans leur sens scolastique, qui vient d'Aristote. On appelle *substance* ce qui existe en soi, c'est-à-dire le support ou *substratum* réel des phénomènes. On appelle *accident,* au contraire, tout ce qui n'existe qu'en autre chose, c'est-à-dire les propriétés ou qualités de la substance. Au point de vue logique, la substance est le *sujet* dont les accidents sont les divers *attributs;* en grammaire, la substance est généralement représentée par le *substantif,* et l'accident par l'*adjectif* (dit *qualificatif*). Aussi a-t-on traduit le mot anglais « *adjective* » tantôt par *attribut,* tantôt par *accident.* En Physique, la substance des corps est la matière ou masse; les accidents sont toutes leurs propriétés mécaniques (vitesse, accélération, force vive), physiques (poids, élasticité, température, potentiel électrique) et sensibles (couleur, son, odeur, saveur). Demander si l'espace est une substance ou un accident, c'est demander s'il existe par lui-même, s'il a une réalité propre, indépendante des corps qui l'occupent, ou s'il n'est qu'une propriété commune de ces corps (leur étendue) ou encore une relation entre eux (leur ordre).

Synthétique, *voir* Analytique.

Transcendant, Transcendantal, *voir* Esthétique.

NOTES MATHÉMATIQUES,

PAR L'AUTEUR.

COLLINÉATION. — Ce terme est le nom général de toutes les opérations qui transforment une figure donnée en une figure projectivement semblable. Une collinéation équivaut à une ou plusieurs transformations projectives (*voir* §§ 109, 110, 114). Ainsi, deux figures qui peuvent se déduire l'une de l'autre par collinéation ne diffèrent, au point de vue projectif, que par la position; leur relation est analogue à celle des figures congruentes en Géométrie métrique. De même qu'une transformation par le mouvement laisse invariables les propriétés métriques, de même une transformation par collinéation laisse invariables les propriétés projectives. Et puisque, quand les propriétés métriques sont invariables, les propriétés projectives le sont aussi, une transformation par mouvement est un cas particulier de collinéation.

Mathématiquement, une collinéation est une transformation linéaire de tous les éléments de la figure : points, lignes, plans, suivant le cas. Ainsi, dans l'espace à n dimensions, soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ les coordonnées homogènes d'un élément de la figure, et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, x'_{n+1}$ les coordonnées de l'élément correspondant de la figure transformée, la collinéation la plus générale est donnée par les $(n+1)$ équations

$$\begin{aligned}
\rho x'_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + a_{1,n+1}x_{n+1},\\
\rho x'_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n + a_{2,n+1}x_{n+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\rho x'_{n+1} &= a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \ldots + a_{n+1,n}x_n + a_{n+1,n+1}x_{n+1},
\end{aligned}$$

où le déterminant $|a_{i,j}|$ ne doit pas être nul.

CONGRUENCE. — Ce terme peut se prendre en deux sens : 1° On peut dire que deux figures sont congruentes, lorsqu'elles concordent exactement dans toutes leurs propriétés métriques, c'est-à-dire lorsqu'elles diffèrent seulement de position ; 2° Toutes les fois que deux figures sont congruentes dans le premier sens, elles peuvent être

superposées de manière à occuper exactement le même espace. Cette superposition est le criterium de l'égalité spatiale ; ainsi, dans le second sens, deux figures ne sont dites *congruentes* que quand elles sont actuellement superposées.

Toutes les fois que deux figures sont congruentes dans le premier sens, on peut, par un simple déplacement, les rendre congruentes dans le second sens. C'est dans le second sens que la congruence est un criterium d'égalité spatiale. J'ai employé ce mot dans les deux sens, qui sont faciles à distinguer par le contexte.

CONSTANTE SPATIALE. — La constante spatiale est une certaine constante impliquée dans toutes les équations non-euclidiennes qui contiennent des distances, de même que la constante *quatre angles droits* est impliquée dans toutes les équations euclidiennes et non-euclidiennes qui contiennent des angles. On doit observer que, dans les Géométries non-euclidiennes, la formule de la distance en fonction des coordonnées n'est pas, comme dans la Géométrie euclidienne, une formule quadratique, mais une formule qui donne le cosinus ou le cosinus hyperbolique du rapport de la distance à une certaine distance fondamentale. Ainsi, si l'équation de l'Absolu est

$$\Sigma_{xx} = 0,$$

Σ_{xx} étant une forme quadratique, et si l'on écrit $\Sigma_{xx'}$ pour la forme polaire, la distance D des deux points x, x' sera donné par les formules suivantes :

Dans la Géométrie elliptique et sphérique :

$$\cos\frac{D}{\gamma} = \frac{\Sigma_{xx'}}{\sqrt{\Sigma_{xx}.\Sigma_{x'x'}}}.$$

Dans la Géométrie hyperbolique :

$$\cos h\,\frac{D}{\gamma} = \frac{\Sigma_{xx'}}{\sqrt{\Sigma_{xx}.\Sigma_{x'x'}}}.$$

La quantité γ impliquée dans ces deux équations peut être définie comme la constante spatiale. Mais comme la quantité $\frac{1}{\gamma^2}$ dans le premier cas, et $-\frac{1}{\gamma^2}$ dans le second, est celle qu'on a appelée *courbure totale* dans la période métrique, c'est elle, et non γ, que j'ai appelée *constante spatiale*.

Cette quantité dérive de la formule de l'arc infiniment petit par la

même formule que Gauss a donnée pour la courbure totale d'une surface, et c'est pourquoi on a l'habitude de considérer les espaces non-euclidiens comme ayant une courbure. Dans la Géométrie elliptique et sphérique, si l'on fait coïncider x et x', on trouve

$$\cos\frac{D}{\gamma} = 1,$$

d'où

$$D = 2n\pi\gamma,$$

n étant o ou un nombre entier. Ainsi la longueur d'une ligne droite complète est $2\pi\gamma$ en Géométrie sphérique, ou $\pi\gamma$ en Géométrie elliptique, puisque, dans cette dernière, le point x est le même que le point $-x$. Dans la Géométrie hyperbolique, on ne peut pas donner à la constante spatiale un pareil sens simple.

Courbure. — Voici la formule de Gauss pour la courbure d'une surface telle qu'elle dérive de la formule de l'arc infiniment petit.

Supposons l'arc donné par la formule

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2,$$

p, q étant les coordonnées d'un point quelconque de la surface, et E, F, G des fonctions de p et q. Alors, la courbure est la quantité k déterminée par la formule

$$\begin{aligned}
4(EG - F^2)k = {} & E\left[\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial q} - 2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2\right] \\
& + F\left[\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p} - 2\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial q} + 4\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q} - 2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p}\right] \\
& + G\left[\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p} - 2\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q} + \left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2\right] \\
& - 2(EG - F^2)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right).
\end{aligned}$$

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

DÉFINITION DU PROBLÈME PAR SES RELATIONS AVEC LA LOGIQUE, LA PSYCHOLOGIE ET LES MATHÉMATIQUES.

CHAPITRE Ier.

HISTOIRE SOMMAIRE DE LA MÉTAGÉOMÉTRIE.

CHAPITRE II.

EXPOSÉ CRITIQUE DE QUELQUES THÉORIES PHILOSOPHIQUES ANTÉRIEURES DE LA GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE III.

SECTION A. — LES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

SECTION B. — LES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE.

I. — *L'Axiome de Libre Mobilité.*

II. — *L'Axiome des Dimensions.*

III. — *L'Axiome de la Distance.*

CHAPITRE IV.

CONSÉQUENCES PHILOSOPHIQUES

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

27652 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.



27652 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

